高雄中學科學班 · 110 - 114 學年度

數學 40 題
題目卷

完整原題影像 · 每題獨立作答空間

> 每年選取 8 道完整原題，共 40 題；題內小題完整保留。本卷不含答案，請先獨立作答，再對照另一本詳解卷。
>
> 第 37 題為條件研討題：原題的「相鄰」需要先明確定義，不列唯一標準答案。

姓名：_____　　練習日期：_____

題目索引

01 110 年 填充 1 · 根式方程與線性組合
02 110 年 填充 2 · 實數方程組
03 110 年 填充 3 · 二次方程式根與參數範圍
04 110 年 填充 5 · 三角形截比與面積
05 110 年 填充 6 · 區間上的二次多項式界限
06 110 年 填充 7 · 平行四邊形與垂線角度
07 110 年 填充 8 · 總和固定的遞增等差數列
08 110 年 證明 1 · 二次函數循環方程組的唯一解
09 111 年 填充 1 · 冪次分式的化簡
10 111 年 填充 3 · 韋達定理與整數根
11 111 年 填充 4 · 矩形對角線延長與距離
12 111 年 填充 7 · 兩顆骰子的乘積與和
13 111 年 填充 8 · 互質因數配對
14 111 年 填充 9 · 絕對值函數的二重合成
15 111 年 證明 12 · 單位分數的正整數解
16 111 年 證明 14 · 內點到三邊距離的面積恆等式
17 112 年 填充 1 · 二次方程根的降次運算
18 112 年 填充 3 · 根式條件與平方和
19 112 年 填充 4 · 集合中的乘十七互斥選取
20 112 年 填充 5 · 符號金字塔的計數
21 112 年 填充 6 · 折返斜線數表定位
22 112 年 填充 7 · 半圓與垂直交點距離
23 112 年 填充 11 · 直線上的等腰三角形
24 112 年 證明 16 · 調和和不是整數
25 113 年 填充 2 · 方格路徑的平均長度
26 113 年 填充 3 · 兩根式方程的完整解
27 113 年 填充 4 · 四捨五入打擊率的最小分母
28 113 年 填充 6 · 兩層中位數的極值
29 113 年 填充 8 · 連續正整數和
30 113 年 填充 10 · 加法型整數數列
31 113 年 填充 12 · 質數條件與模運算
32 113 年 證明 2 · 二元二次整數方程
33 114 年 填充 1 · 孿生質數中點的因數個數
34 114 年 填充 2 · 同時形成三個等腰三角形的點
35 114 年 填充 5 · 二元二次式的最小值
36 114 年 填充 6 · 平行四邊形中的面積與交點
37 114 年 填充 7 · 九宮格的相鄰數字路徑
38 114 年 填充 11 · 對稱式方程組的完整解值
39 114 年 證明 1 · 整除與循環小數的互補數字
40 114 年 證明 2 · 整除限制下的排列計數

整理日期：2026-09-11 · 與網站雄中 39 題練習及 1 題研討對照使用。

01 / 40 · KH110-F01

根式方程與線性組合

110 學年度（2021）· 一、填充題第 1 題

1. 若 x 為實數滿足 $\sqrt{x+2560}-\sqrt{2344-x}=68$，試求 $28\sqrt{x+2560}+27\sqrt{2344-x}$ 的值為何？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

02 / 40 · KH110-F02

實數方程組

110 學年度（2021）· 一、填充題第 2 題

2. 求解方程組 $\begin{cases} x+y+\dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{y}=10 \\ \left(x^2+9\right)\left(y^2+4\right)=24xy \end{cases}$，其中 x, y 為實數。

官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

110 學年度官方數學試卷 · 第 2 頁 · 題號 KH110-F02 · 原始試卷連結

二次方程式根與參數範圍

110 學年度（2021）· 一、填充題第 3 題

3. 設 x 的實係數二次方程式 $ax^2-14x-7=0$ 有實根 α,β，而 y 的實係數二次方程式 $y^2-2(b-1)y+b^2-2b=0$ 有實根 γ,δ，且 $-2\le\gamma<\delta\le 4$，又已知 $\frac{2}{\alpha+\beta}-\frac{6}{\alpha\beta}+2(2\gamma-\delta^2)+14=0$，求實數 a 的範圍為何？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

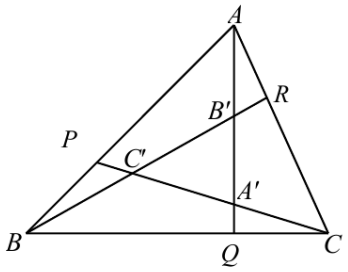
作答與推導

04 / 40 · KH110-F05

三角形截比與面積

110 學年度（2021）· 一、填充題第 5 題

5. 如右圖所示，任意給定一個三角形 ΔABC，已知 P,Q,R 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 三邊上的三點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{BQ}:\overline{QC}=\overline{CR}:\overline{RA}=2:1$，若 $\overline{CP},\overline{AQ},\overline{BR}$ 兩兩交於點 A',B',C'，且 ΔABC 的面積為 15，試求 $\Delta A'B'C'$ 的面積為何？



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

110 學年度官方數學試卷 · 第 2 頁 · 題號 KH110-F05 · 原始試卷連結

05 / 40 · KH110-F06

區間上的二次多項式界限

110 學年度（2021）· 一、填充題第 6 題

6. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，若對所有 $x\in[0,1]$，恆有 $|f(x)|\le 1$，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值為何？

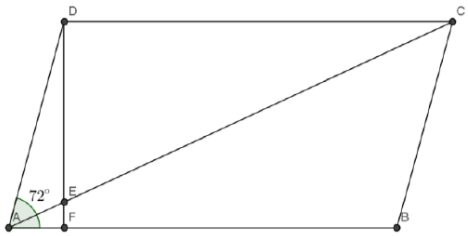
官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

平行四邊形與垂線角度

110 學年度（2021）· 一、填充題第 7 題

7. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$，若 $\angle BAD=72°$，$\overline{DF}$ 垂直 $\overline{AB}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E 點且 $\overline{CE}=2\overline{AD}$，試求 $\angle CED$ 的度數為何？



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

07 / 40 · KH110-F08

總和固定的遞增等差數列

110 學年度（2021）· 一、填充題第 8 題

8. 已知等差數列$\{a_n\}$每一項均為自然數且$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$，$n\geq 3$，若$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=110$，試問滿足這樣條件的等差數列$\{a_n\}$共有多少組?

官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

110 學年度官方數學試卷 · 第 3 頁 · 題號 KH110-F08 · 原始試卷連結

二次函數循環方程組的唯一解

110 學年度（2021）· 二、計算證明題第 1 題

案卷」上正確題號之空格內。每題15分。

1. 實數 a,b,c 滿足 $a\neq 0$，$(b-1)^2=4ac$，試證明：下列2021個變數 $x_1,x_2,...,x_{2021}$ 所滿足的聯立方程組

$$\begin{cases} ax_1^{\,2}+bx_1+c=x_2 \\ ax_2^{\,2}+bx_2+c=x_3 \\ \vdots \\ ax_{2020}^{\,2}+bx_{2020}+c=x_{2021} \\ ax_{2021}^{\,2}+bx_{2021}+c=x_1 \end{cases}$$ 有唯一解。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 4 頁。

作答與推導

09 / 40 · KH111-F01

冪次分式的化簡

111 學年度（2022）· 一、填充題第 1 題

1. 求值：$\frac{2^{2022}-2^{2020}}{2^{2022}+2^{2021}}+\frac{2^{4044}-2^{4040}}{2^{4044}+2^{4042}}+\frac{2^{6066}-2^{6060}}{2^{6066}+2^{6063}}+\frac{2^{8088}-2^{8080}}{2^{8088}+2^{8084}}$。（以最簡分數表示）

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

111 學年度官方數學試卷 · 第 2 頁 · 題號 KH111-F01 · 原始試卷連結

10 / 40 · KH111-F03

韋達定理與整數根

111 學年度（2022）· 一、填充題第 3 題

3. 設整數 a,b 滿足 $2b-3a=111$ 且方程式 $x^2+ax+b=0$ 的解均為正整數，試求數對 (a,b)。

官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

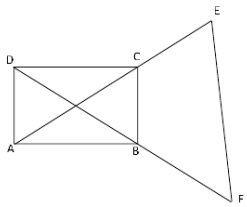
作答與推導

111 學年度官方數學試卷 · 第 2 頁 · 題號 KH111-F03 · 原始試卷連結

矩形對角線延長與距離

111 學年度（2022）· 一、填充題第 4 題

4. 如圖，矩形 $ABCD$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$。若在 $\overline{AC}$ 上取一點 E 使 $\overline{CE}=3$；在 $\overline{DB}$ 上取一點 F 使 $\overline{BF}=4$，試求 $\overline{EF}$ 的長度。



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

12 / 40 · KH111-F07

兩顆骰子的乘積與和

111 學年度（2022）· 一、填充題第 7 題

7. 投擲兩個公正的骰子，試問其點數積大於點數和的機率。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

互質因數配對

111 學年度（2022）· 一、填充題第 8 題

8. 設 a,b 均為正整數。數對 (a,b) 滿足 a,b 互質且 $ab=1\times2\times3\times\cdots\times19\times20$，試問共有多少個不同的數對 (a,b)？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

絕對值函數的二重合成

111 學年度（2022）· 一、填充題第 9 題

9. 設 $f(x)=x^2-6|x|$，試問方程式 $f(f(x))=0$ 的實數解共有多少個？。

官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

15 / 40 · KH111-P12

單位分數的正整數解

111 學年度（2022）· 二、計算證明題第 12 題

12. 設 x,y,z 為正整數且 $x\le y\le z$。若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{8}$，試求數對 (x,y,z) 所有可能的解。（7%）

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 4 頁。

作答與推導

111 學年度官方數學試卷 · 第 4 頁 · 題號 KH111-P12 · 原始試卷連結

內點到三邊距離的面積恆等式

111 學年度（2022）· 二、計算證明題第 14 題

14. P 為銳角 ΔABC 內部一點，設 P 到邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 的距離分別為 p_a，p_b，p_c；且 ΔABC 在 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 邊上的高分別為 h_a，h_b，h_c。試證明：$\frac{p_a}{h_a}+\frac{p_b}{h_b}+\frac{p_c}{h_c}=1$。(8%)

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 4 頁。

作答與推導

111 學年度官方數學試卷，第 4 頁 · 題號 KH111-P14 · 原始試卷連結

17 / 40 · KH112-F01

二次方程根的降次運算

112 學年度（2023）· 一、填充題第 1 題

1. 已知 a 為二次方程式 $3x^2-2x-663=0$ 的一個解，試求 $\left(3a^3-664\frac{1}{3}a-445\right)^3$ 的值。

官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

作答與推導

112 學年度官方數學試卷 · 第 1 頁 · 題號 KH112-F01 · 原始試卷連結

根式條件與平方和

112 學年度（2023）· 一、填充題第 3 題

3. 已知實數 a,b,c 滿足 $a\geq 0$，$b\geq 1$，$c\geq -1$ 以及 $a+4b+c+3=2\sqrt{a}+4\sqrt{b-1}+4\sqrt{c+1}$，試求 $a+b+c$ 的值。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

作答與推導

19 / 40 · KH112-F04

集合中的乘十七互斥選取

112 學年度（2023）· 一、填充題第 4 題

4. 數學中有個基本概念稱作「集合」，是一個收集特定元素所形成的物件。例如，$A=\{1,2,3\}$ 這個集合收集了 1,2,3 這三個正整數，又可以說 1,2,3 這三個元素「屬於」集合 A。此外，如果集合 B 的所有元素也都屬於集合 A，則說集合 B 是集合 A 的「子集」。例如，$B_1=\{1,2\}$，$B_2=\{3,2\}$ 都是集合 $A=\{1,2,3\}$ 的子集。根據上述語言，如果集合 $U=\{1,2,3,\cdots,2023\}$，且集合 M 是滿足「只要 n 屬於 M，$17n$ 便不屬於 M」的所有 U 的子集中擁有最多元素的一個，試問集合 M 的元素個數有多少個？

官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

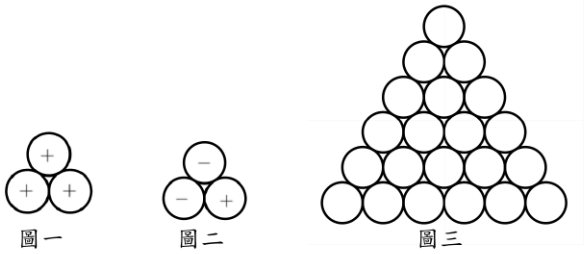
作答與推導

112 學年度官方數學試卷 · 第 1 頁 · 題號 KH112-F04 · 原始試卷連結

符號金字塔的計數

112 學年度（2023）· 一、填充題第 5 題

5. 有一個填符號遊戲，只要在最下層的◯中填入符號「＋」或「－」，則上層中所有的◯就會自動顯示符號「＋」或「－」其中之一。規則如下：
(1) 若相鄰的兩個◯中符號相同，則上面的◯顯示「＋」，如圖一所示
(2) 若相鄰的兩個◯中符號不同，則上面的◯顯示「－」，如圖二所示
在圖三中，若要使得最上層的◯中顯示「＋」，則最下層有多少種填法？



官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

作答與推導

折返斜線數表定位

112 學年度（2023）· 一、填充題第 6 題

6. 將正整數 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,... 依下列規則排列，若將橫排稱為列，直排稱為行，我們可以用列與行來描述某個正整數的位置。例如：第2列第3行的數字為 9。若 2023 在第 m 列第 n 行，試求數對 (m,n)。

1	**3**	**4**	**10**	**11**	**21**	...
2	5	9	12	20		
6	8	13	19			
7	14	18				
15	17					
16						
⋮						

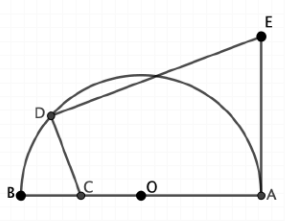
官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

半圓與垂直交點距離

112 學年度（2023）· 一、填充題第 7 題

7. 如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓，O 為圓心，C 為 $\overline{OB}$ 中點。$\overline{AE}$ 為圓 O 的切線，$\overline{AB}=4$，$\overline{AE}=\sqrt{7}$，若 D 為此半圓上的一點且 $\overline{CD}\perp\overline{DE}$，試求 $\overline{CD}$ 的長。



官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

直線上的等腰三角形

112 學年度（2023）· 一、填充題第 11 題

11. 在直角坐標平面上，O 為原點，方程式 $3x-y=0$ 所表示的圖形為直線 L，點 A 的坐標為 $(0,3)$，點 P 在直線 L 上，若 ΔAOP 為等腰三角形，試求點 P 的坐標。(答案不止一解)

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

調和和不是整數

112 學年度（2023）· 二、計算證明題第 16 題

16. 說明 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{64}$ 不是一個正整數。(8%)

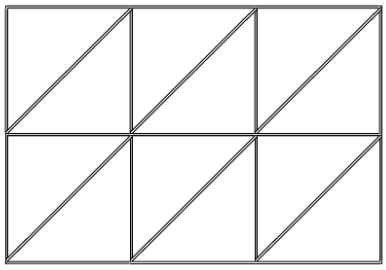
官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

方格路徑的平均長度

113 學年度（2024）· 一、填充題第 2 題

2. 如下圖，這是由六個邊長皆為1的正方形所組成的矩形路徑圖，今規定從左下角頂點到右上角頂點只能走三種路徑：往上走、往右走，往右上斜走。請問所有走法的平均路徑長？



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

兩根式方程的完整解

113 學年度（2024）· 一、填充題第 3 題

3. 試求解方程式$\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}=3$，全對才給分。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

27 / 40 · KH113-F04

四捨五入打擊率的最小分母

113 學年度（2024）· 一、填充題第 4 題

4. 在棒球比賽中，一位打者的打擊率定義為「總安打數除以總打擊數，四捨五入後取到小數點下第三位」。例如，雄雄本季的總打數為 318 次，總安打數為 99 次，則其打擊率為 0.311。今天，若阿中本季的打擊率為 0.399，試問阿中本季的「總打數」至少為多少？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

兩層中位數的極值

113 學年度（2024）· 一、填充題第 6 題

6. 已知奇數個數字的中位數定義如下：將這些數字由小到大排序之後，正中間那個數字稱為中位數。例如：$2,3,1,6,7,4,5$ 的中位數為 4。今有 $S_1,S_2,...,S_{343}$ 等 343 個「數字群」，每個「數字群」都恰包含了 7 個整數，且所有這 2401 個數皆不相同。若將 $S_1,S_2,...,S_{343}$ 各自的中位數分別記作 $m_1,m_2,...,m_{343}$，且 $m_1,m_2,...,m_{343}$ 的中位數為 M，試問這 2401 個數當中，「最多」可能有多少個數小於 M？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

連續正整數和

113 學年度（2024）· 一、填充題第 8 題

8. 觀察$15=1+2+3+4+5=4+5+6=7+8$，因此15有3種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法。試問420有多少種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

30 / 40 · KH113-F10

加法型整數數列

113 學年度（2024）· 一、填充題第 10 題

10. 令$\{a_n\}$為一整數數列，其中$a_1=1$，且對於任意正整數n,m，皆滿足$a_{m+n}=a_m+a_n+mn$，試求$a_{50}=?$

官方原卷影像 · 保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

質數條件與模運算

113 學年度（2024）· 一、填充題第 12 題

12. 若 p 為質數，且 $q=4^p+p^4+4$ 也是質數，試求所有可能的 q 值之總和？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

二元二次整數方程

113 學年度（2024）· 二、計算證明題第 2 題

2. 是否存在整數 m,n，使得方程式 $5m^2-6mn+7n^2=115$ 有解？若有，請寫下一組解；若沒有，請說明理由。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

33 / 40 · KH114-F01

學生質數中點的因數個數

114 學年度（2025）· 一、填充題第 1 題

1. 已知正整數 n 滿足 $100 \le n \le 200$，且 $n-1$ 與 $n+1$ 均為質數，試求滿足上述條件的所有的正整數 n 當中，其正因數個數最多是幾個。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

同時形成三個等腰三角形的點

114 學年度（2025）· 一、填充題第 2 題

2. 在正ΔABC所在的平面上一點P，可使得ΔPAB，ΔPBC，ΔPAC均為等腰三角形，試求這樣的點P共有幾個。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

35 / 40 · KH114-F05

二元二次式的最小值

114 學年度（2025）· 一、填充題第 5 題

5. 已知x, y為實數，試求$5x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 12y + 5$的最小值。

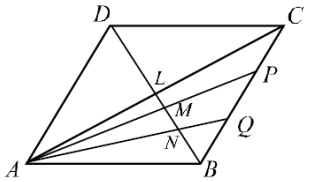
官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

平行四邊形中的面積與交點

114 學年度（2025）· 一、填充題第 6 題

6. 如圖所示，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，ΔABC 、 ΔABP 、 ΔABQ 的面積分別為 84 、 63 、 28 ，試求 ΔAMN 的面積。



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

37 / 40 · KH114-F07

九宮格的相鄰數字路徑

114 學年度（2025）· 一、填充題第 7 題

條件研討題：先說明你採用的「相鄰」定義，不作唯一判分。

7. 將數字 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 填入 3×3 的 9 宮格當中，使得數字 1 和數字 2 相鄰、數字 2 和數字 3 相鄰、數字 3 和數字 4 相鄰、……、數字 8 和數字 9 相鄰，這樣的填數字的方法有幾種？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答與推導

對稱式方程組的完整解值

114 學年度（2025）· 一、填充題第 11 題

11. 已知實數a,b,c滿足$\begin{cases} bc-a^2=5 \\ ca-b^2=-1 \\ ab-c^2=-7 \end{cases}$，試求$8a+9b+10c$之值。（不只一組解，全對才給分）。

官方原卷影像．保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

39 / 40 · KH114-P01

整除與循環小數的互補數字

114 學年度（2025）· 二、計算證明題第 1 題

1. 已知 a,b 為互質的正整數且 $a>b\geq 1$，且 $a\mid 10^k+1$，k 為正整數。試回答下列問題：(備註：我們將 p 整除 q 記作 $p\mid q$，此時 p 為 q 的因數。)

(1)若 $a\mid 10^k+1$，請問正整數 $2,3,5$ 三個數當中，那些可以是 a 的因數？(2 分)

(2)證明：若 $a\mid 10^k+1$，則 $a\mid \underbrace{99\cdots999\cdots9}_{2k\text{位數}}$。(5 分)

(3)根據(2)，可將 $\frac{b}{a}$ 寫成 $\frac{\overbrace{x_1x_2\cdots x_k}^{k\text{位數}}\overbrace{y_1y_2\cdots y_k}^{k\text{位數}}}{\underbrace{99\cdots999\cdots9}_{2k\text{位數}}}$，其中分母的每一位都是 9、分子的每一位都是數字 0~9 且允許開頭為 0。

試證明：分子中每一組對應的 $x_i+y_i=9$，$i=1,2,\cdots k$。(8 分)

例如：已知 $7\mid 1001$，則 $7\mid 999999$，可將 $\frac{2}{7}$ 寫成 $\frac{285714}{999999}$，發現分子的 6 位數中，$2+7=8+1=5+4=9$

例如：已知 $11\mid 11$，則 $11\mid 99$，可將 $\frac{3}{11}$ 寫成 $\frac{27}{99}$，發現分子的 2 位數中，$0+9=9$

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導

整除限制下的排列計數

114 學年度（2025）· 二、計算證明題第 2 題

2. 將自然數$3,4,5,\ldots,1154,1155$ 排成一個數列$\{a_k\}$，使得數字k要為a_k的因數，其中$k=1,2,3,\ldots,1153$，試求滿足條件的排列種數。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答與推導