

數學 40 題 詳解卷

解題切入點・完整推導・不同方法驗算・常見錯誤

本卷為經獨立推導與覆核的擬答，不是學校官方答案。39 題列覆核解答；1 題依不同條件分開討論，不作唯一判分。
每題依序列出原題、作答結果、解題切入點、完整推導、另一種驗算與容易出錯的地方。數值抽查不能取代證明。

建議用法：先讀切入點再自行重做；最後核對完整推導與驗算，不只核對最後答案。

題目索引

- | | | | |
|----|-------------------------|----|---------------------------|
| 01 | 110 年 填充 1・根式方程與線性組合 | 02 | 110 年 填充 2・實數方程組 |
| 03 | 110 年 填充 3・二次方程式根與參數範圍 | 04 | 110 年 填充 5・三角形截比與面積 |
| 05 | 110 年 填充 6・區間上的二次多項式界限 | 06 | 110 年 填充 7・平行四邊形與垂線角度 |
| 07 | 110 年 填充 8・總和固定的遞增等差數列 | 08 | 110 年 證明 1・二次函數循環方程組的唯一解 |
| 09 | 111 年 填充 1・冪次分式的化簡 | 10 | 111 年 填充 3・韋達定理與整數根 |
| 11 | 111 年 填充 4・矩形對角線延長與距離 | 12 | 111 年 填充 7・兩顆骰子的乘積與和 |
| 13 | 111 年 填充 8・互質因數配對 | 14 | 111 年 填充 9・絕對值函數的二重合成 |
| 15 | 111 年 證明 12・單位分數的正整數解 | 16 | 111 年 證明 14・內點到三邊距離的面積恆等式 |
| 17 | 112 年 填充 1・二次方程根的降次運算 | 18 | 112 年 填充 3・根式條件與平方和 |
| 19 | 112 年 填充 4・集合中的乘十七互斥選取 | 20 | 112 年 填充 5・符號金字塔的計數 |
| 21 | 112 年 填充 6・折返斜線數表定位 | 22 | 112 年 填充 7・半圓與垂直交點距離 |
| 23 | 112 年 填充 11・直線上的等腰三角形 | 24 | 112 年 證明 16・調和和不是整數 |
| 25 | 113 年 填充 2・方格路徑的平均長度 | 26 | 113 年 填充 3・兩根式方程的完整解 |
| 27 | 113 年 填充 4・四捨五入打擊率的最小分母 | 28 | 113 年 填充 6・兩層中位數的極值 |
| 29 | 113 年 填充 8・連續正整數和 | 30 | 113 年 填充 10・加法型整數數列 |
| 31 | 113 年 填充 12・質數條件與模運算 | 32 | 113 年 證明 2・二元二次整數方程 |
| 33 | 114 年 填充 1・孿生質數中點的因數個數 | 34 | 114 年 填充 2・同時形成三個等腰三角形的點 |
| 35 | 114 年 填充 5・二元二次式的最小值 | 36 | 114 年 填充 6・平行四邊形中的面積與交點 |
| 37 | 114 年 填充 7・九宮格的相鄰數字路徑 | 38 | 114 年 填充 11・對稱式方程組的完整解值 |
| 39 | 114 年 證明 1・整除與循環小數的互補數字 | 40 | 114 年 證明 2・整除限制下的排列計數 |

整理日期：2026-09-11・與網站雄中 39 題練習及 1 題研討對照使用。

根式方程與線性組合

110 學年度 (2021) · 一、填充題第 1 題

原題

若 x 為實數滿足 $\sqrt{x+2560} - \sqrt{2344-x} = 68$ ，試求 $28\sqrt{x+2560} + 27\sqrt{2344-x}$ 的值為何？

1. 若 x 為實數滿足 $\sqrt{x+2560} - \sqrt{2344-x} = 68$ ，試求 $28\sqrt{x+2560} + 27\sqrt{2344-x}$ 的值為何？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

擬答：2014。

解題切入點

把兩個根式分別設為非負數 A, B 。除了題給的差 $A - B = 68$ ，兩個被開方數相加還會給出固定的 $A^2 + B^2 = 4904$ 。

完整推導

令

$$A = \sqrt{x+2560}, \quad B = \sqrt{2344-x}.$$

因為平方根取非負值，所以 $A, B \geq 0$ 。題設給出 $A - B = 68$ ，而

$$A^2 + B^2 = (x+2560) + (2344-x) = 4904.$$

因此

$$(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$$

給出

$$68^2 = 4904 - 2AB, \quad AB = 140.$$

再算

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB = 4904 + 280 = 5184 = 72^2.$$

由 $A + B \geq 0$ 得 $A + B = 72$ 。聯立 $A + B = 72$ 與 $A - B = 68$ ，可得

$$A = 70, \quad B = 2.$$

所求為

$$28A + 27B = 28 \cdot 70 + 27 \cdot 2 = 1960 + 54 = \boxed{2014}.$$

另一種驗算

直接只解其中一個根式也可驗算。由 $A = B + 68$ 代入 $A^2 + B^2 = 4904$ ，得到

$$2B^2 + 136B + 4624 = 4904,$$

即

$$B^2 + 68B - 140 = (B - 2)(B + 70) = 0.$$

因 $B \geq 0$ ，只能取 $B = 2$ ，故 $A = 70$ 。再由 $B^2 = 2344 - x$ 得 $x = 2340$ ；代回兩個被開方數分別是 4900 與 4，原式確為 $70 - 2 = 68$ ，目標值也確為 2014。

容易出錯的地方

- 平方根 A, B 都是非負數，因此 $A + B = 72$ 不能取負號。
- 兩個被開方數相加時， x 會消去；不要分別展開成繁複的含 x 方程。
- 若用平方解方程，最後必須代回原式排除增根。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

110 學年度官方數學試卷，第 2 頁·題號 KH110-F01·原始試卷連結

02 / 40 · KH110-F02

實數方程組

110 學年度 (2021) · 一、填充題第 2 題

原題

求解方程組

$$\begin{cases} x + y + \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 10, \\ (x^2 + 9)(y^2 + 4) = 24xy, \end{cases}$$

其中 x, y 為實數。

$$2. \text{ 求解方程組 } \begin{cases} x + y + \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 10 \\ (x^2 + 9)(y^2 + 4) = 24xy \end{cases}, \text{ 其中 } x, y \text{ 為實數。}$$

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

擬答： $(x, y) = (3, 2)$ 。

解題切入點

把第二式移到同一邊，可恰好拆成兩個平方和；平方和為零時，每一平方都必須為零。

完整推導

由第一式含有 $9/x$ 與 $4/y$ ，可知 $x, y \neq 0$ 。將第二式展開並移項：

$$x^2y^2 + 4x^2 + 9y^2 + 36 - 24xy = 0.$$

左邊可分解成

$$(xy - 6)^2 + (2x - 3y)^2 = 0.$$

兩項都是實數的平方，因此必須同時為零：

$$xy = 6, \quad 2x = 3y.$$

由 $x = 3y/2$ 代入 $xy = 6$ ，得 $3y^2/2 = 6$ ，所以 $y = \pm 2$ ，相應的 $x = \pm 3$ 。第二式因此只留下兩個候選：

$$(3, 2), \quad (-3, -2).$$

逐一代入第一式：

$$(3, 2): \quad 3 + 2 + 3 + 2 = 10;$$

$$(-3, -2): \quad -3 - 2 - 3 - 2 = -10 \neq 10.$$

故唯一解是

$$\boxed{(x, y) = (3, 2)}.$$

另一種驗算

用等號條件獨立檢查第二式。因 $x^2 + 9 \geq 6|x|$ 、 $y^2 + 4 \geq 4|y|$ ，所以

$$(x^2 + 9)(y^2 + 4) \geq 24|xy|.$$

題設右邊是 $24xy$ ，而左邊為正，先知 $xy > 0$ ，故 $|xy| = xy$ 。題設恰達到下界，兩個不等式都必須取等號，因此 $x^2 = 9$ 、 $y^2 = 4$ 。配合 $xy > 0$ ，仍只有 $(3, 2)$ 與 $(-3, -2)$ ；第一式再次只保留 $(3, 2)$ 。

容易出錯的地方

- 只從第二式得到兩個候選後就停止；第一式還會排除負數候選。
- 使用 AM-GM 時忘記先處理 xy 的正負；本題由第二式可知 $xy > 0$ 。
- 平方和為零是因 x, y 為實數；複數情形不能直接套用。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

110 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH110-F02，原始試卷連結

03 / 40 · KH110-F03

二次方程式根與參數範圍

110 學年度 (2021) · 一、填充題第 3 題

原題

設 x 的實係數二次方程式 $ax^2 - 14x - 7 = 0$ 有實根 α, β ，而 y 的實係數二次方程式 $y^2 - 2(b-1)y + b^2 - 2b = 0$ 有實根 γ, δ ，且 $-2 \leq \gamma < \delta \leq 4$ ，又已知

$$\frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{6}{\alpha\beta} + 2(2\gamma - \delta^2) + 14 = 0,$$

求實數 a 的範圍為何？

3. 設 x 的實係數二次方程式 $ax^2 - 14x - 7 = 0$ 有實根 α, β ，而 y 的實係數二次方程式 $y^2 - 2(b-1)y + b^2 - 2b = 0$ 有實根 γ, δ ，且 $-2 \leq \gamma < \delta \leq 4$ ，又已知 $\frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{6}{\alpha\beta} + 2(2\gamma - \delta^2) + 14 = 0$ ，求實數 a 的範圍為何？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

擬答：

$$[-7, 0) \cup (0, 10].$$

解題切入點

第二個二次式可直接看成根為 $b-2, b$ ；第一個二次式用韋達定理後，題給的兩個分式合併得恰好是 a 。最後同時套用根的區間限制與判別式條件。

完整推導

先處理 y 的方程式：

$$y^2 - 2(b-1)y + b^2 - 2b = (y-b)(y-b+2).$$

兩根相差 2，且題設指定 $\gamma < \delta$ ，所以

$$\gamma = b - 2, \quad \delta = b.$$

由 $-2 \leq \gamma < \delta \leq 4$ 得

$$-2 \leq b-2, \quad b \leq 4,$$

即

$$0 \leq b \leq 4. \quad (1)$$

對 x 的二次方程式用韋達定理：

$$\alpha + \beta = \frac{14}{a}, \quad \alpha\beta = -\frac{7}{a}.$$

因題目稱它為二次方程式，故 $a \neq 0$ 。於是

$$\frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{6}{\alpha\beta} = \frac{2a}{14} + \frac{6a}{7} = a.$$

題給末式化為

$$a + 2\{2(b-2) - b^2\} + 14 = 0,$$

所以

$$a = 2b^2 - 4b - 6 = 2(b-1)^2 - 8. \quad (2)$$

當 $b \in [0, 4]$ 時，式 (2) 的值域原為 $[-8, 10]$ 。但是第一個二次方程式還必須有實根，其判別式為

$$(-14)^2 - 4a(-7) = 196 + 28a = 28(a+7),$$

故還要 $a \geq -7$ 。此外 $a = 0$ 不能形成二次方程式，也會使韋達式無意義，因此排除。綜合得到候選範圍

$$[-7, 0) \cup (0, 10].$$

完整性方面，任給其中一個 a ，取

$$b = 1 + \sqrt{\frac{a+8}{2}}.$$

因 $a \in [-7, 10]$ ，可得 $b \in [1 + 1/\sqrt{2}, 4] \subset [0, 4]$ ，且式 (2) 成立； $a \neq 0$ 又確保第一式是二次方程式。因此範圍內每個值都能達成，沒有空缺。

另一種驗算

反向核對各限制：第二式的判別式恆為 4，故兩根必為 $b-2, b$ ，不會發生重根；區間條件等價於 $0 \leq b \leq 4$ 。再由 $a = 2(b-1)^2 - 8$ 可見拋物線最低點在 $b = 1$ ，值為 -8 ，而右端 $b = 4$ 給 10。第一式有實根把下界截到 -7 ； $a = -7$ 時判別式為 0，仍有實根，故左端要保留。 $a = 10$ 對應 $b = 4$ ，根為 2, 4，也要保留。只有 $a = 0$ 使首式降為一次式，必須挖掉。這些端點與開閉情形和主解一致。

容易出錯的地方

- 只求出 $a = 2(b-1)^2 - 8$ 的值域而漏掉第一個方程式的實根判別式，會錯把下界寫成 -8 。
- 忘記『二次方程式』要求 $a \neq 0$ ，因此 0 不在答案中。
- 根已按 $\gamma < \delta$ 排序，所以必須取 $\gamma = b-2, \delta = b$ ，不能任意交換。

- 只得到必要範圍而未證明範圍內每個 a 都能由某個 b 達成。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

110 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH110-F03，原始試卷連結

04 / 40 · KH110-F05

三角形截比與面積

110 學年度 (2021) · 一、填充題第 5 題

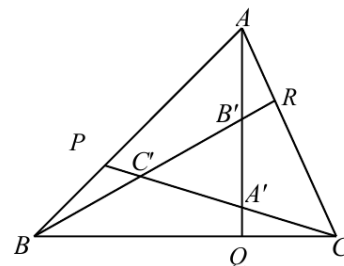
原題

如右圖所示，任意給定一個三角形 $\triangle ABC$ ，已知 P, Q, R 分別為 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 三邊上的三點，且

$$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{CR} : \overline{RA} = 2 : 1.$$

若 $\overline{CP}, \overline{AQ}, \overline{BR}$ 兩兩交於 A', B', C' ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 15，試求 $\triangle A'B'C'$ 的面積為何？點與交線的位置請參考原題圖。

5. 如右圖所示，任意給定一個三角形 $\triangle ABC$ ，已知 P, Q, R 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 三邊上的三點，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{CR} : \overline{RA} = 2 : 1$ ，若 $\overline{CP}, \overline{AQ}, \overline{BR}$ 兩兩交於點 A', B', C' ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 15，試求 $\triangle A'B'C'$ 的面積為何？



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

$\frac{15}{7}$ 。這是依題目條件推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

邊上固定比例與直線交點在仿射變換下都保持不變，因此可把三角形方便地設成直角座標，再用交點座標與行列式算出內三角形面積比。

完整推導

- 依原圖，三個交點依序為 $A' = CP \cap AQ$ 、 $B' = AQ \cap BR$ 、 $C' = BR \cap CP$ 。我們先求內外三角形的面積比。任何非退化三角形都可想成把一張方格紙作「平行拉伸與斜推」後，由一個直角三角形變成的；這種變形會把直線仍變成直線，也會保留一條線段上的分點比例。因此 $2 : 1$ 分點及三線交點不會改

變。所有小面積與大面積同時乘上同一固定倍數，所以面積比也不變。故可選最容易計算的直角三角形代表原圖。

2. 取 $A = (0, 0), B = (3, 0), C = (0, 3)$ 。由三個 $2 : 1$ 分點條件，

$$P = (2, 0), \quad Q = (1, 2), \quad R = (0, 1).$$

3. 三條線的方程式為

$$CP : y = 3 - \frac{3}{2}x, \quad AQ : y = 2x, \quad BR : y = 1 - \frac{1}{3}x.$$

4. 兩兩聯立可得

$$A' = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right), \quad B' = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad C' = \left(\frac{12}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

例如 A' 由 $2x = 3 - \frac{3}{2}x$ 得到，其餘同理。5. 以 A' 為共同起點，

$$\overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right), \quad \overrightarrow{A'C'} = \left(\frac{6}{7}, -\frac{9}{7}\right).$$

若兩個向量是 (p, q) 、 (r, s) ，它們張成的平行四邊形面積是 $|ps - qr|$ ；可由外接長方形扣掉四個直角三角形得到。三角形面積是其一半。因此

$$[A'B'C'] = \frac{1}{2} \left| \left(-\frac{3}{7}\right) \left(-\frac{9}{7}\right) - \left(-\frac{6}{7}\right) \left(\frac{6}{7}\right) \right| = \frac{9}{14}.$$

6. 此代表圖形的外三角形面積是

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2},$$

所以

$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} = \frac{9/14}{9/2} = \frac{1}{7}.$$

原題的大三角形面積為 15，故

$$[A'B'C'] = 15 \cdot \frac{1}{7} = \frac{15}{7}.$$

另一種驗算

改用純幾何截比與同底同高面積比，不設座標。為簡化符號，令 $X = A'$ 、 $Y = B'$ 、 $Z = C'$ 。

1. 在 $\triangle AQC$ 中，直線 $B - Y - R$ 分別交 CQ 的延長線、 AQ 、 AC 。由 Menelaus 定理，

$$\frac{AR}{RC} \cdot \frac{CB}{BQ} \cdot \frac{QY}{YA} = 1.$$

題設給 $AR : RC = 1 : 2$ 、 $BQ : QC = 2 : 1$ ，所以 $CB : BQ = 3 : 2$ ，代入得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{QY}{YA} = 1,$$

因此 $AY : YQ = 3 : 4$ ，即 $AY = \frac{3}{7}AQ$ 。

2. 在 $\triangle ABQ$ 中，直線 $P-X-C$ 分別交 AB 、 AQ 、 BQ 的延長線。再次用 Menelaus 定理，

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BC}{CQ} \cdot \frac{QX}{XA} = 1.$$

因 $AP:PB = 2:1$ 、 $BC:CQ = 3:1$ ，可得

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{QX}{XA} = 1,$$

所以 $AX:XQ = 6:1$ ，即 $AX = \frac{6}{7}AQ$ 。因此點的順序是 $A-Y-X-Q$ ，且

$$XY = AX - AY = \frac{3}{7}AQ.$$

3. 題目的三組 $2:1$ 條件完全循環對稱。把 A, B, C 依序換成 B, C, A ，上面兩個結論分別變成

$$BZ:ZR = 3:4, \quad BY:YR = 6:1.$$

故在同一直線 BR 上， $BZ = \frac{3}{7}BR$ 、 $BY = \frac{6}{7}BR$ ，所以 $BZ = ZY$ ；也就是 Z 是 $\overline{BY}$ 的中點。

4. 比較 $\triangle XYZ$ 與 $\triangle AQB$ 。它們的底 XY 、 AQ 在同一直線上，且 $XY/AQ = 3/7$ 。又因 Z 是 BY 的中點、 Y 在直線 AQ 上， Z 到 AQ 的高正好是 B 到 AQ 的高的一半。因此

$$\frac{[XYZ]}{[AQB]} = \frac{XY}{AQ} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}.$$

5. $\triangle AQB$ 與 $\triangle ACB$ 對同一直線 BC 有相同的高，且 $BQ:BC = 2:3$ ，所以

$$\frac{[AQB]}{[ABC]} = \frac{2}{3}.$$

合併兩式，

$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} = \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{7},$$

仍得 $[A'B'C'] = 15/7$ 。這一驗算只使用截比、Menelaus 定理及同底同高面積比，沒有使用座標或行列式。

容易出錯的地方

- 三個 $2:1$ 的方向不同： $AP:PB$ 、 $BQ:QC$ 、 $CR:RA$ 都要照題目從前一個端點讀到後一個端點。
- 只算出內外面積比 $1/7$ 還沒有作答；題目給外三角形面積 15 ，最後需乘上 15 。
- 原圖中的 A', B', C' 是三條線的兩兩交點，不是邊上的 P, Q, R 。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。

區間上的二次多項式界限

110 學年度 (2021) · 一、填充題第 6 題

原題

已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若對所有 $x \in [0, 1]$ ，恆有 $|f(x)| \leq 1$ ，求 $|a| + |b| + |c|$ 的最大值為何？

6. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若對所有 $x \in [0, 1]$ ，恆有 $|f(x)| \leq 1$ ，求 $|a| + |b| + |c|$ 的最大值為何？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

17。這是依題目條件推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

把二次式的三個係數改由 $f(0), f(1/2), f(1)$ 表示；題設直接限制這三個值都在 $[-1, 1]$ ，三角不等式便給出全域上界，再找一個在整段區間都符合限制且達到上界的二次式。

完整推導

1. 設

$$u = f(0), \quad v = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad w = f(1).$$

題設對每個 $x \in [0, 1]$ 都成立，所以 $|u|, |v|, |w| \leq 1$ 。2. 由

$$u = c, \quad v = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c, \quad w = a + b + c$$

聯立解出

$$a = 2u - 4v + 2w, \quad b = -3u + 4v - w, \quad c = u.$$

3. 由三角不等式，

$$|a| \leq 2|u| + 4|v| + 2|w| \leq 8,$$

$$|b| \leq 3|u| + 4|v| + |w| \leq 8,$$

且 $|c| = |u| \leq 1$ 。所以對每個合乎題意的二次式，都有

$$|a| + |b| + |c| \leq 8 + 8 + 1 = 17.$$

這是適用於整個區間條件的普遍上界。4. 還要證明 17 真的能達到。取

$$f(x) = 8x^2 - 8x + 1 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1.$$

當 $0 \leq x \leq 1$ 時， $0 \leq (x - 1/2)^2 \leq 1/4$ ，故 $-1 \leq f(x) \leq 1$ ，確實符合題設。5. 此例的 $(a, b, c) = (8, -8, 1)$ ，所以

$$|a| + |b| + |c| = 8 + 8 + 1 = 17.$$

上界可達，因此最大值就是 17。

另一種驗算

改用配方與頂點位置分情形，不使用主解的三點插值。把 f 換成 $-f$ 不會改變 $|a| + |b| + |c|$ 或條件 $|f(x)| \leq 1$ ，所以當 $a \neq 0$ 時可令新的首項係數 $a > 0$ 。寫成

$$f(x) = a(x - h)^2 + k, \quad b = -2ah.$$

1. 若 $a = 0$ ，則 f 是一次式或常數。由 $|f(0)|, |f(1)| \leq 1$ ，

$$|b| = |f(1) - f(0)| \leq 2, \quad |c| = |f(0)| \leq 1,$$

故總和至多 3。

2. 設 $a > 0$ 且頂點 $h \in [0, 1]$ 。拋物線開口向上，區間內最小值在頂點，最大值在端點。由 $f(h) = k \geq -1$ ，令 $A = 1 - k$ ，則 $0 \leq A \leq 2$ 。兩端不超過 1 給出

$$ah^2 \leq A, \quad a(1 - h)^2 \leq A,$$

所以

$$a \leq \frac{2}{\max\{h^2, (1 - h)^2\}}.$$

又 $|c| = |f(0)| \leq 1$ ，且 $|b| = 2ah$ ，故

$$|a| + |b| + |c| \leq a(1 + 2h) + 1.$$

當 $0 \leq h \leq 1/2$ 時，上式至多

$$\frac{2(1 + 2h)}{(1 - h)^2} + 1 \leq \frac{2(1 + 1)}{(1/2)^2} + 1 = 17;$$

其中左邊隨 h 增加。當 $1/2 \leq h \leq 1$ 時，上式至多

$$\frac{2(1 + 2h)}{h^2} + 1 \leq \frac{2(1 + 1)}{(1/2)^2} + 1 = 17;$$

因為 $(1 + 2h)/h^2$ 在 $h > 0$ 遞減，所以此段最大值在 $h = 1/2$ 。兩段都不超過 17。

3. 若 $h < 0$ ，則 f 在 $[0, 1]$ 上遞增，且 $a > 0, b = -2ah > 0$ 。因此

$$|a| + |b| = a + b = f(1) - f(0) \leq 2,$$

再加 $|c| \leq 1$ ，總和至多 3。

4. 若 $h > 1$ ，則 f 在 $[0, 1]$ 上遞減。由

$$f(0) - f(1) = a(2h - 1) \leq 2$$

及 $h > 1$ 時 $(2h + 1)/(2h - 1) \leq 3$ ，得到

$$|a| + |b| = a + 2ah = a(2h + 1) \leq 6.$$

再加 $|c| \leq 1$ ，總和至多 7。

5. 所有情形都不超過 17。主解給出的 $f(x) = 8(x - 1/2)^2 - 1$ 正好屬於第 2 種，且達到 17，所以此配方分支法獨立確認最大值為 17。

容易出錯的地方

- 只檢查 $x = 0, 1/2, 1$ 不能反過來證明任意二次式在整段 $[0, 1]$ 都滿足 $|f(x)| \leq 1$ ；這三點在主解只用來建立必要上界。
- 提出數值 17 後，必須另給一個在整個區間都合格的達界例，才能證明是最大值而不是只有上界。
- 驗證達界式時，應利用 $0 \leq (x - 1/2)^2 \leq 1/4$ ，不能只代端點。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。

110 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH110-F06，原始試卷連結

06 / 40 · KH110-F07

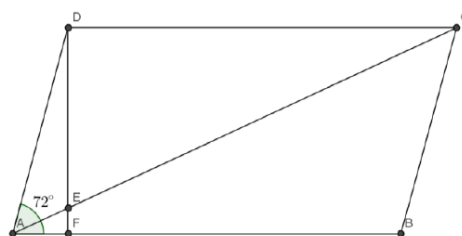
平行四邊形與垂線角度

110 學年度 (2021) · 一、填充題第 7 題

原題

如右圖，平行四邊形 $ABCD$ ，若 $\angle BAD = 72^\circ$ ， DF 垂直 AB 交 AC 於 E 點，且 $CE = 2AD$ ，試求 $\angle CED$ 的度數為何？

7. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ ，若 $\angle BAD = 72^\circ$ ， $\overline{DF}$ 垂直 $\overline{AB}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E 點且 $\overline{CE} = 2\overline{AD}$ ，試求 $\angle CED$ 的度數為何？



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

擬答：66°。

解題切入點

令對角線 AC 與底邊 AB 的夾角為 φ 。利用 D, E, F 共線且垂直底邊，把 AE 與 AD 的水平投影相等；再用 C, D 等高，把垂直投影相等，便得到 $\sin(72^\circ - \varphi) = \sin 2\varphi$ 。

完整推導

依圖， A, F, B 共線， D, E, F 共線且 $DF \perp AB$ ，並且 A, E, C 共線。令

$$\varphi = \angle CAB.$$

圖中對角線 AC 位於 AB 與 AD 之間，因此 $0 < \varphi < 72^\circ$ 。因 E, D 在同一條垂直於 AB 的直線上， AE 與 AD 在 AB 方向的投影相同：

$$AE \cos \varphi = AD \cos 72^\circ. \quad (1)$$

又因 $ABCD$ 是平行四邊形， $CD \parallel AB$ ，所以 C, D 到 AB 的高度相等：

$$AC \sin \varphi = AD \sin 72^\circ. \quad (2)$$

點 E 在 AC 上，且 $CE = 2AD$ ，故

$$AC = AE + CE = AE + 2AD.$$

把 (1) 的 $AE = AD \cos 72^\circ / \cos \varphi$ 代入 (2)，約去非零的 AD ：

$$\left(\frac{\cos 72^\circ}{\cos \varphi} + 2 \right) \sin \varphi = \sin 72^\circ.$$

乘以 $\cos \varphi$ 並移項，得到

$$\sin 72^\circ \cos \varphi - \cos 72^\circ \sin \varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

即

$$\sin(72^\circ - \varphi) = \sin 2\varphi. \quad (3)$$

在 $0 < \varphi < 72^\circ$ 下，(3) 的兩種角度可能為

$$72^\circ - \varphi = 2\varphi$$

或

$$72^\circ - \varphi = 180^\circ - 2\varphi.$$

第二式給 $\varphi = 108^\circ$ ，不合範圍；第一式給 $\varphi = 24^\circ$ 。最後， $DE \perp AB$ ，而 EC 與 AB 夾角為 φ ，故

$$\angle CED = 90^\circ - \varphi = \boxed{66^\circ}.$$

另一種驗算

以三角形 ADC 作幾何驗算。因 $CD \parallel AB$ ，所以 $\angle ADC = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ ，而 $\angle ACD = \varphi$ 。在直角三角形 CDE 中， $CE = 2AD$ 且 $\angle DCE = \varphi$ ，故

$$CD = CE \cos \varphi = 2AD \cos \varphi.$$

另一方面，對三角形 ADC 用正弦定理：

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin(72^\circ - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

合併兩式仍得 $\sin(72^\circ - \varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ ，因此唯一合圖形範圍者仍是 $\varphi = 24^\circ$ ，目標角為 66° 。這條驗算直接使用三角形邊角關係，不使用主解的投影方程。

容易出錯的地方

- 原圖的正確點位是 A, F, B 共線、 D, E, F 共線、 A, E, C 共線；若把頂點或垂線看錯，整個角度關係會顛倒。
- 由 $\sin u = \sin v$ 不能只寫 $u = v$ ；還要檢查 $u = 180^\circ - v$ ，再用角度範圍排除。
- 所求 $\angle CED$ 是直線 EC 與鉛直線 ED 的夾角，因此是 $90^\circ - \varphi$ ，不是 φ 。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

110 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH110-F07，原始試卷連結

07 / 40 · KH110-F08

總和固定的遞增等差數列

110 學年度 (2021) · 一、填充題第 8 題

原題

已知等差數列 $\{a_n\}$ 每一項均為自然數且 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ ， $n \geq 3$ ，若 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 110$ ，試問滿足這樣條件的等差數列 $\{a_n\}$ 共有多少組？

8. 已知等差數列 $\{a_n\}$ 每一項均為自然數且 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ ， $n \geq 3$ ，若 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 110$ ，試問滿足這樣條件的等差數列 $\{a_n\}$ 共有多少組？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

擬答：21 組。本講義把自然數約定為 $1, 2, 3, \dots$ ；若另採包含 0 的定義，則為 23 組。

解題切入點

設首項為 a 、公差為正整數 d 。由等差級數公式得到 $n\{2a + (n-1)d\} = 220$ ，所以只需檢查不超過長度上界的 220 因數。

完整推導

本講義依計數的常用口徑，約定自然數為 $1, 2, 3, \dots$ 。設首項 $a \geq 1$ 、公差為正整數 d 。等差級數公式給

$$n\{2a + (n-1)d\} = 220.$$

所以 $n \mid 220$ ；又最小總和為 $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ ，故 $n \leq 14$ 。配合 $n \geq 3$ ，只需檢查 $n = 4, 5, 10, 11$ 。

- $n = 4$ ： $2a + 3d = 55$ ， d 為奇數，且 $3d \leq 53$ ，所以 $d = 1, 3, \dots, 17$ ，共 9 組。
- $n = 5$ ： $a + 2d = 22$ ，所以 $d = 1, 2, \dots, 10$ ，共 10 組。
- $n = 10$ ： $2a + 9d = 22$ ， d 為正偶數且 $9d \leq 20$ ，所以只有 $(a, d) = (2, 2)$ ，共 1 組。
- $n = 11$ ： $a + 5d = 10$ ，所以只有 $(a, d) = (5, 1)$ ，共 1 組。

所有組合都滿足原式，且長度已完整排除其他可能，故共有

$$9 + 10 + 1 + 1 = \boxed{21}.$$

定義不同時的附註：若把 0 也列為自然數，則可多出 $(0, 11, 22, 33, 44)$ 與 $(0, 2, 4, \dots, 20)$ 兩列，因此變成 23。這是定義差異，不是計算錯誤。

另一種驗算

用中項或平均數重算。 $n = 5$ 時中項為 22，最小項 $22 - 2d \geq 1$ ，得 $d = 1, \dots, 10$ ，共 10 組。 $n = 11$ 時中項為 10， $10 - 5d \geq 1$ ，只有 $d = 1$ 。 $n = 4$ 時平均為 27.5， d 須奇數，最小項 $27.5 - 1.5d \geq 1$ ，得 $d = 1, 3, \dots, 17$ ，共 9 組。 $n = 10$ 時平均為 11， d 須正偶數且 $11 - 4.5d \geq 1$ ，只有 $d = 2$ 。合計仍為 21。允許零首項時，僅新增主解附註中的兩列。

容易出錯的地方

- 『自然數』是否包含 0 在不同教材中有兩種約定；本題的原卷頁面沒有另行定義，不能把約定悄悄藏起來。
- 由總和式得到的是 $n \mid 220$ ，不是 $n \mid 110$ 。
- 嚴格遞增表示公差 $d > 0$ ，不能計入常數數列或負公差。
- 只列出可能的 n ，還要逐一計算每個 n 下首項與公差的組數。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。明訂自然數從 1 起算為 21 組，另列含零的 23 組；不把定義差異當計算錯誤。

二次函數循環方程組的唯一解

110 學年度 (2021) · 二、計算證明題第 1 題

原題

實數 a, b, c 滿足 $a \neq 0$ 、 $(b-1)^2 = 4ac$ 。試證明：下列 2021 個變數 $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ 所滿足的聯立方程組

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3, \\ \vdots \\ ax_{2020}^2 + bx_{2020} + c = x_{2021}, \\ ax_{2021}^2 + bx_{2021} + c = x_1 \end{cases}$$

有唯一解。

案卷」上正確題號之空格內。每題15分。

1. 實數 a, b, c 滿足 $a \neq 0$ ， $(b-1)^2 = 4ac$ ，試證明：下列 2021 個變數 $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ 所滿足的聯立方程組

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \vdots \\ ax_{2020}^2 + bx_{2020} + c = x_{2021} \\ ax_{2021}^2 + bx_{2021} + c = x_1 \end{cases} \quad \text{有唯一解。}$$

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 4 頁。

作答結果

解域約定：以下按原題實數脈絡，求 $x_1, \dots, x_{2021} \in \mathbb{R}$ 的解。原卷只明寫係數為實數，沒有另印所有未知數的解域；不能將本證明直接延伸至複數。

擬答：唯一解為

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2021} = \frac{1-b}{2a}.$$

解題切入點

條件 $(b-1)^2 = 4ac$ 使 $ax^2 + (b-1)x + c$ 成為完全平方。把 2021 個『下一項減本項』相加，左邊循環相消，右邊成為平方和。

完整推導

解域約定：以下按原題實數脈絡，求 $x_1, \dots, x_{2021} \in \mathbb{R}$ 的解。原卷只明寫係數為實數，沒有另印所有未知數的解域；不能將本證明直接延伸至複數。

令

$$r = \frac{1-b}{2a}.$$

因 $a \neq 0$ 且 $(b-1)^2 = 4ac$ ，可得

$$ax^2 + (b-1)x + c = a(x-r)^2. \quad (1)$$

為了把循環下標寫得簡潔，令 $x_{2022} = x_1$ 。原聯立方程組的第 i 式可改寫為

$$x_{i+1} - x_i = ax_i^2 + (b-1)x_i + c = a(x_i - r)^2, \quad i = 1, 2, \dots, 2021.$$

把全部 2021 式相加。左邊循環相消：

$$\sum_{i=1}^{2021} (x_{i+1} - x_i) = 0.$$

因此

$$a \sum_{i=1}^{2021} (x_i - r)^2 = 0.$$

由 $a \neq 0$ ，得到

$$\sum_{i=1}^{2021} (x_i - r)^2 = 0.$$

每一項都是非負實數，所以每一項都必須為 0：

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2021} = r.$$

這證明任何解都只能是這一組。最後驗證存在性：由 (1) 在 $x = r$ 時有

$$ar^2 + br + c - r = a(r-r)^2 = 0,$$

即 $ar^2 + br + c = r$ 。因此把全部 x_i 都取為 r 確實滿足每一式。故唯一解為

$$\boxed{x_1 = \dots = x_{2021} = \frac{1-b}{2a}}.$$

另一種驗算

不用把所有式子相加，也可用單調性驗算。由 (1)，若 $a > 0$ ，每一式都給 $x_{i+1} - x_i = a(x_i - r)^2 \geq 0$ ，所以

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2021} \leq x_1.$$

循環首尾迫使所有不等號都是等號，進而每個 $x_i = r$ 。若 $a < 0$ ，所有不等號反向，仍由

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2021} \geq x_1$$

得到同一結論。再代回固定值 r 即可確認存在。這也顯示證明其實不依賴 2021 的奇偶，只依賴循環結構。

容易出錯的地方

- 只證明『至多一解』而沒有把候選值代回，尚未證明解存在。
- 由平方和為零推出各平方為零，依賴所有變數都是實數。
- 不能先除以 a 而忘記題設 $a \neq 0$ ；這個條件同時確保 r 有定義。
- 循環相消必須包含最後一式 $x_{2022} = x_1$ 。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。明訂未知數取實數；平方和唯一性不延伸到複數。

110 學年度官方數學試卷，第 4 頁，題號 KH110-P01，原始試卷連結

09 / 40 · KH111-F01

冪次分式的化簡

111 學年度 (2022) · 一、填充題第 1 題

原題

求值：

$$\frac{2^{2022} - 2^{2020}}{2^{2022} + 2^{2021}} + \frac{2^{4044} - 2^{4040}}{2^{4044} + 2^{4042}} + \frac{2^{6066} - 2^{6060}}{2^{6066} + 2^{6063}} + \frac{2^{8088} - 2^{8080}}{2^{8088} + 2^{8084}}.$$

(以最簡分數表示)

1. 求值： $\frac{2^{2022} - 2^{2020}}{2^{2022} + 2^{2021}} + \frac{2^{4044} - 2^{4040}}{2^{4044} + 2^{4042}} + \frac{2^{6066} - 2^{6060}}{2^{6066} + 2^{6063}} + \frac{2^{8088} - 2^{8080}}{2^{8088} + 2^{8084}}$ 。(以最簡分數表示)

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

擬答： $\frac{49}{16}$ 。

解題切入點

四項其實有同一結構。第 k 項先提出 2^{2020k} ，再利用平方差分解，會化成 $1 - 2^{-k}$ 。

完整推導

把四項編為 $k = 1, 2, 3, 4$ 。第 k 項是

$$T_k = \frac{2^{2022k} - 2^{2020k}}{2^{2022k} + 2^{2021k}}.$$

分子、分母同提出 2^{2020k} ：

$$T_k = \frac{2^{2k} - 1}{2^{2k} + 2^k} = \frac{(2^k - 1)(2^k + 1)}{2^k(2^k + 1)} = \frac{2^k - 1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

因此原式為

$$\sum_{k=1}^4 \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right).$$

括號內是等比級數，和為 $15/16$ ，故

$$4 - \frac{15}{16} = \boxed{\frac{49}{16}}.$$

分子 49 與分母 16 互質，已是最簡分數。

另一種驗算

逐項化簡可直接驗算指數沒有抄錯：第一項是 $3/6 = 1/2$ ；第二項是 $15/(4 \cdot 5) = 3/4$ ；第三項是 $63/(8 \cdot 9) = 7/8$ ；第四項是 $255/(16 \cdot 17) = 15/16$ 。相加得到

$$(8 + 12 + 14 + 15)/16 = 49/16,$$

與通式法一致。

容易出錯的地方

- 四項的指數差依序是 2、4、6、8；提出的共同冪也隨項次改變。
- 平方差 $2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ 後，才能與分母約分。
- 題目要求最簡分數，最後仍要確認 49 與 16 互質。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

111 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH111-F01，原始試卷連結

10 / 40 · KH111-F03

韋達定理與整數根

111 學年度 (2022) · 一、填充題第 3 題

原題

設整數 a, b 滿足 $2b - 3a = 111$ ，且方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的解均為正整數，試求數對 (a, b) 。

3. 設整數 a, b 滿足 $2b - 3a = 111$ 且方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的解均為正整數，試求數對 (a, b) 。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

擬答： $(a, b) = (-17, 30), (-13, 36)$ 。

解題切入點

把兩個正整數根設為 r, s ，由韋達定理代回線性條件，再配成 $(2r + 3)(2s + 3) = 231$ ，問題就化為有限的正因數配對。

完整推導

設方程式的兩個正整數根為 r, s 。由韋達定理，

$$r + s = -a, \quad rs = b.$$

題設 $2b - 3a = 111$ 因此變成

$$2rs + 3r + 3s = 111.$$

兩邊乘 2 再加 9，可配成

$$4rs + 6r + 6s + 9 = 231,$$

即

$$(2r + 3)(2s + 3) = 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11.$$

因 $r, s \geq 1$ ，兩個因數都至少為 5，而且都是正奇數。忽略交換次序後，231 的因數配對只有

$$(1, 231), (3, 77), (7, 33), (11, 21).$$

前兩組的較小因數小於 5，不合 $r, s \geq 1$ ；因此只剩：

- $(2r + 3, 2s + 3) = (7, 33)$ ，得 $(r, s) = (2, 15)$ ，所以 $(a, b) = (-17, 30)$ ；
- $(2r + 3, 2s + 3) = (11, 21)$ ，得 $(r, s) = (4, 9)$ ，所以 $(a, b) = (-13, 36)$ 。

交換 r, s 不會產生新的 (a, b) 。代回檢查： $2(30) - 3(-17) = 111$ ，且 $x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(x - 15)$ ； $2(36) - 3(-13) = 111$ ，且 $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$ 。故答案完整。

另一種驗算

以判別式作另一條有限檢查。令 $S = r + s = -a$ 、 $P = rs = b$ ，則 $2P + 3S = 111$ ，所以 $P = (111 - 3S)/2$ 。根為整數等價於判別式

$$S^2 - 4P = S^2 + 6S - 222 = (S + 3)^2 - 231$$

是非負完全平方，設為 t^2 。於是

$$(S + 3 - t)(S + 3 + t) = 231.$$

兩因數同為正奇數。因數配對 $(3, 77)$ 給 $S = 37$ 但 $P = 0$ ，不合正根； $(7, 33)$ 給 $S = 17, P = 30$ ； $(11, 21)$ 給 $S = 13, P = 36$ ；其餘配對不合正根。故仍只得到兩組 (a, b) 。

容易出錯的地方

- 正整數根表示 $a = -(r + s)$ ，所以 a 必為負數；符號很容易寫反。
- 根的交換不會改變和與積，因此不能把 (r, s) 與 (s, r) 重複計數成兩個 (a, b) 。
- 列因數配對時要排除導致根為 0 的因數 3。
- 找到候選後仍應把方程式因式分解並檢查線性條件。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

111 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH111-F03，原始試卷連結

11 / 40 · KH111-F04

矩形對角線延長與距離

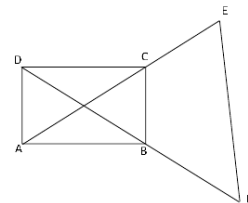
111 學年度 (2022) · 一、填充題第 4 題

原題

如圖，矩形 $ABCD$ ， $AB = 4$ 、 $BC = 3$ 。若在射線 AC 上取一點 E 使 $CE = 3$ ；在射線 DB 上取一點 F 使 $BF = 4$ ，試求 EF 的長度。

4. 如圖，矩形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ 。若在 $\overline{AC}$ 上取一點 E 使 $\overline{CE} = 3$ ；

在 $\overline{DB}$ 上取一點 F 使 $\overline{BF} = 4$ ，試求 $\overline{EF}$ 的長度。



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

擬答： $\boxed{\frac{4\sqrt{82}}{5}}$ 。

解題切入點

把 4×3 矩形放到坐標平面。兩條對角線都是長 5 的 3-4-5 線段，依原圖沿射線越過 C 、 B 延長即可精確寫出 E, F 坐標。

完整推導

依原圖取

$$A = (0, 0), \quad B = (4, 0), \quad C = (4, 3), \quad D = (0, 3).$$

對角線 AC 的方向向量是 $(4, 3)$ ，長度為 5。圖中 E 在射線 AC 上且越過 C ， $CE = 3$ ，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \frac{3}{5}(4, 3) = \left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right), \\ E &= \left(4 + \frac{12}{5}, 3 + \frac{9}{5}\right) = \left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5}\right).\end{aligned}$$

對角線由 D 指向 B 的方向向量是 $(4, -3)$ ，長度也是 5。圖中 F 在射線 DB 上且越過 B ， $BF = 4$ ，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} &= \frac{4}{5}(4, -3) = \left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right), \\ F &= \left(4 + \frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right) = \left(\frac{36}{5}, -\frac{12}{5}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= F - E = \left(\frac{4}{5}, -\frac{36}{5}\right), \\ EF &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{36}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{16 + 1296} = \boxed{\frac{4\sqrt{82}}{5}}.\end{aligned}$$

另一種驗算

用向量而不設坐標原點。令 $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\mathbf{q} = \overrightarrow{AD}$ ，則 $|\mathbf{p}| = 4$ 、 $|\mathbf{q}| = 3$ 且 $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$ 。因 $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = 5$ ，依圖有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \frac{8}{5}(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \\ \overrightarrow{AF} &= \mathbf{p} + \frac{4}{5}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \frac{9}{5}\mathbf{p} - \frac{4}{5}\mathbf{q}.\end{aligned}$$

所以

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{5}\mathbf{p} - \frac{12}{5}\mathbf{q}.$$

由垂直向量的畢氏定理，

$$EF^2 = \frac{1}{25}|\mathbf{p}|^2 + \frac{144}{25}|\mathbf{q}|^2 = \frac{16 + 1296}{25} = \frac{1312}{25},$$

再次得到 $EF = 4\sqrt{82}/5$ 。

容易出錯的地方

- 原圖把 E 取在 C 的外側、 F 取在 B 的外側；若選到同一射線上另一個距離相符的內部點，答案會改變。
- $CE = 3$ 與 $BF = 4$ 是沿對角線方向的長度，不能直接當成水平或鉛直位移。
- 兩條對角線方向分別是 $(4, 3)$ 與 $(4, -3)$ ，第二條的鉛直分量符號相反。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。外側射線取點的主答案一致。Fable 附註把內側兩點距離寫為 $\sqrt{2}$ ，實為 $2\sqrt{13}/5$ ；該錯誤旁支不採用。

111 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH111-F04，原始試卷連結

12 / 40 · KH111-F07

兩顆骰子的乘積與和

111 學年度 (2022) · 一、填充題第 7 題

原題

投擲兩個公正的骰子，試問其點數積大於點數和的機率。

7. 投擲兩個公正的骰子，試問其點數積大於點數和的機率。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

按一般獨立、公正六面骰模型，機率為 $\frac{2}{3}$ 。

解題切入點

把兩骰點數記成 m, n ，將 $mn > m + n$ 改寫為 $(m - 1)(n - 1) > 1$ ；在獨立且公正的標準模型中，36 個有序點數對等可能。

完整推導

1. 採一般擲骰題的標準模型：兩顆骰子獨立，每顆出現 $1, 2, \dots, 6$ 的機率均為 $1/6$ 。因此有序結果 (m, n) 共 $6 \times 6 = 36$ 個，每個機率都是 $(1/6)(1/6) = 1/36$ 。
2. 條件

$$mn > m + n$$

等價於

$$mn - m - n + 1 > 1,$$

也就是

$$(m-1)(n-1) > 1.$$

3. 若 $m=1$ 或 $n=1$ ，左式為 0，不合條件。若 $m, n \geq 2$ ，則兩個因數都是正整數；唯一沒有嚴格大於 1 的情形是 $m=n=2$ ，此時乘積正好等於 1。

4. $m, n \geq 2$ 的有序結果有 $5 \times 5 = 25$ 個，扣除 $(2, 2)$ 後，合條件者有 24 個。因此

$$P(mn > m+n) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

5. 獨立性限制不可省略：若只知道兩顆骰子各自都均勻，聯合結果未必等可能，上述 $24/36$ 便不能推出。

另一種驗算

直接逐列數表格，不用因式分解判斷全部。固定第一顆為 1 時有 0 個成功；固定為 2 時需 $2n > 2+n$ ，即 $n=3, 4, 5, 6$ ，有 4 個；固定為 3, 4, 5, 6 時，第二顆只要是 2, 3, 4, 5, 6 都成功，每列各 5 個。故成功數為 $0+4+5+5+5+5=24$ ，在 36 個等可能有序結果中仍為 $2/3$ 。

容易出錯的地方

- 兩顆骰子要用有序對計數；例如 $(2, 3)$ 與 $(3, 2)$ 是不同結果。
- 條件是點數積嚴格大於點數和，所以 $(2, 2)$ 的 $4=4$ 不可算入。
- 「每顆骰子公正」本身只保證各自六面等機率；計算 36 個等可能有序對還需要獨立性。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。原題未另寫「相互獨立」，本講義在解法第一步明列通常擲骰模型。這不表示「各骰公正」在任意相依機制下都能推出獨立。臺大科學 Online 的有限機率空間例 4 支持此通常教學模型，但不是雄中本題官方答案。

111 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH111-F07，原始試卷連結

13 / 40 · KH111-F08

互質因數配對

111 學年度 (2022) · 一、填充題第 8 題

原題

設 a, b 均為正整數。數對 (a, b) 滿足 a, b 互質且 $ab = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 19 \times 20$ ，試問共有多少個不同的數對 (a, b) ？

8. 設 a, b 均為正整數。數對 (a, b) 滿足 a, b 互質且 $ab = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 19 \times 20$ ，試問共有多少個不同的數對 (a, b) ？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

擬答：256 個。

解題切入點

$20!$ 有 8 種不同質因數。因 a, b 互質，每一種質數的完整冪次只能全部放進 a 或全部放進 b ，各有兩種選擇。

完整推導

把乘積寫成 $20!$ 。不大於 20 的質數為

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$

共 8 個，因此可寫成

$$20! = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} 7^{e_7} 11^{e_{11}} 13^{e_{13}} 17^{e_{17}} 19^{e_{19}},$$

其中各指數皆為正整數。現在考慮任一質數，例如 2。若 a 與 b 都含有因數 2，就會有 $\gcd(a, b) \geq 2$ ，違反互質。因此 2^{e_2} 必須整包放進 a 或整包放進 b 。其餘 7 種質數也各自有同樣的兩種選擇，而且彼此獨立。故有序數對 (a, b) 的總數是

$$2^8 = 256.$$

其中選擇所有質因數都給 a 會得到 $(20!, 1)$ ，全部給 b 會得到 $(1, 20!)$ ，兩者都合法，沒有額外排除。

另一種驗算

先數無序配對再核對『數對』的順序。把 8 種質因數分成兩邊時，若不區分哪邊叫 a 、哪邊叫 b ，互補的兩個質數集合描述同一組，因此共有 $2^8/2 = 128$ 組無序配對。由於 $20! > 1$ 且 a, b 互質，不可能有 $a = b$ ；所以每一組無序配對都恰產生 (a, b) 與 (b, a) 兩個不同的有序數對。總數為 $128 \times 2 = 256$ ，與主解一致。

容易出錯的地方

- 不能把某個質數的冪次拆一部分給 a 、一部分給 b ，否則兩數不互質。
- 題目問數對 (a, b) ，順序不同算不同；若只數無序分組會少一半。
- 要數的是不同質數種類，共 8 種，不是把 $20!$ 的所有質因數重複次數相加。
- 1 與任何正整數互質，所以 $(1, 20!)$ 與 $(20!, 1)$ 都要計入。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

絕對值函數的二重合成

111 學年度 (2022) · 一、填充題第 9 題

原題

設 $f(x) = x^2 - 6|x|$ ，試問方程式 $f(f(x)) = 0$ 的實數解共有多少個？

9. 設 $f(x) = x^2 - 6|x|$ ，試問方程式 $f(f(x)) = 0$ 的實數解共有多少個？。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

9 個。這是依原題條件推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

先把外層方程 $f(y) = 0$ 解完，再分別計算 $f(x) = 0, 6, -6$ 的原像數量。用 $t = |x| \geq 0$ 可把絕對值方程化成普通二次方程。

完整推導

1. 先把 $f(f(x)) = 0$ 看成外層問題。令 $y = f(x)$ ，則

$$f(y) = y^2 - 6|y| = |y|(|y| - 6) = 0。$$

所以 $y = 0, 6, -6$ 。換句話說，只需解

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 6, \quad f(x) = -6。$$

2. 令 $t = |x| \geq 0$ ，則 $f(x) = t^2 - 6t$ 。

3. 當 $f(x) = 0$ 時， $t(t - 6) = 0$ ，故 $t = 0$ 或 6 。對應

$$x = 0, 6, -6,$$

共有 3 個解。4. 當 $f(x) = 6$ 時，

$$t^2 - 6t - 6 = 0,$$

所以 $t = 3 \pm \sqrt{15}$ 。因 $3 - \sqrt{15} < 0$ 不合 $t \geq 0$ ，只留 $t = 3 + \sqrt{15}$ ，對應正、負兩個 x ，共有 2 個解。5. 當 $f(x) = -6$ 時，

$$t^2 - 6t + 6 = 0,$$

所以 $t = 3 \pm \sqrt{3}$ 。兩者都為正，每個 t 都對應 $x = \pm t$ ，共有 4 個解。6. 三組的 $f(x)$ 值不同，解不會重複，因此總數是

$$3 + 2 + 4 = 9。$$

另一種驗算

把 $g(t) = t^2 - 6t = (t - 3)^2 - 9$ 畫在 $t \geq 0$ 上。水平線 $y = 0$ 與圖形交於 $t = 0, 6$ ；其中 $t = 0$ 只給一個 x ， $t = 6$ 給兩個 x ，共 3 個。水平線 $y = 6$ 在 $t \geq 0$ 只有一個交點且交點為正，故給 2 個 x 。水平線 $y = -6$ 位於最低值 -9 與 0 之間，有兩個正交點，故給 4 個 x 。圖形交點計數再次得到 $3 + 2 + 4 = 9$ 。

容易出錯的地方

- 外層 $f(y) = 0$ 的解有 $0, 6, -6$ 三個，不能只取 0 與 6 。
- 令 $t = |x|$ 後必須保留條件 $t \geq 0$ ； $3 - \sqrt{15}$ 要刪除。
- $t = 0$ 只對應一個 x ，正的 t 才各對應 $x = \pm t$ 兩個。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

111 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH111-F09，原始試卷連結

15 / 40 · KH111-P12

單位分數的正整數解

111 學年度 (2022) · 二、計算證明題第 12 題

原題

設 x, y, z 為正整數且 $x \leq y \leq z$ 。若

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{8},$$

試求數對 (x, y, z) 所有可能的解。

12. 設 x, y, z 為正整數且 $x \leq y \leq z$ 。若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{8}$ ，試求數對 (x, y, z) 所有可能的解。(7%)

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 4 頁。

作答結果

所有解為

$$(x, y, z) = (2, 3, 24), (2, 4, 8).$$

這是依題目條件推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

利用 $x \leq y \leq z$ 把最小分母 x 夾在很小的範圍，再逐一限制 y ；每個剩餘的 z 都由方程唯一決定，因此能證明沒有漏解。

完整推導

1. 因為 $x \leq y \leq z$ ，所以 $1/x \geq 1/y \geq 1/z$ 。若 $x = 1$ ，左邊大於 1，不可能等於 $7/8$ ；若 $x \geq 4$ ，則左邊至多 $3/4 < 7/8$ 。故只需考慮 $x = 2$ 或 $x = 3$ 。
2. 先令 $x = 2$ 。方程化為

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{8}.$$

因 $y \leq z$ ，有 $3/8 \leq 2/y$ ，所以 $y \leq 16/3$ 。又 $y \geq x = 2$ ； $y = 2$ 時單是 $1/y = 1/2$ 已大於 $3/8$ ，故只需查 $y = 3, 4, 5$ 。3. 逐一代入：

1. $y = 3$ 時， $1/z = 3/8 - 1/3 = 1/24$ ，得 $z = 24$ 。
2. $y = 4$ 時， $1/z = 3/8 - 1/4 = 1/8$ ，得 $z = 8$ 。
3. $y = 5$ 時， $1/z = 3/8 - 1/5 = 7/40$ ，得 $z = 40/7$ ，不是正整數。所以 $x = 2$ 給出 $(2, 3, 24)$ 、 $(2, 4, 8)$ 。
4. 再令 $x = 3$ 。方程化為

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{24}.$$

若 $y \geq 4$ ，則左邊至多 $2/y \leq 1/2 < 13/24$ ，故只能有 $y = 3$ 。此時

$$\frac{1}{z} = \frac{13}{24} - \frac{1}{3} = \frac{5}{24},$$

得 $z = 24/5$ ，不是正整數。故 $x = 3$ 無解。5. 前兩步已證明 x 只有兩種、每種的 y 只有列出的有限可能，而 z 在給定 x, y 後唯一，因此沒有其他分支。直接代回可驗證兩組列出的解都等於 $7/8$ ，且符合 $x \leq y \leq z$ 。

另一種驗算

用因數分解重新枚舉。當 $x = 2$ 時， $1/y + 1/z = 3/8$ 等價於

$$(3y - 8)(3z - 8) = 64.$$

因 $y \leq z$ ，只需取 64 的因數對中第一因數不超過 8，並要求 $y = (d + 8)/3$ 為整數；只有 $(d, 64/d) = (1, 64), (4, 16)$ ，分別給 $(y, z) = (3, 24), (4, 8)$ 。當 $x = 3$ 時，同理得到

$$(13y - 24)(13z - 24) = 576.$$

第一因數不超過 24，且必須是 576 的正因數並滿足 $d \equiv 2 \pmod{13}$ ；候選只有 $d = 2$ ，卻給 $y = 2 < x = 3$ ，所以無解。因數對法獨立確認完整解集仍是兩組。

容易出錯的地方

- 題目要求的是有序限制 $x \leq y \leq z$ 下的所有三元組，不應把同一組分母的排列重複列出。
- 找到兩組可行解不足以證明完整；必須先用大小關係把 x, y 的範圍封閉。

- $y = 5$ 或 $x = y = 3$ 算出的 z 不是整數，不能因為是正有理數就保留。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。覆核初稿曾把原卷的 $7/8$ 誤讀為 $17/8$ ；已回原頁更正並重新獨立推導，兩組答案皆精確代回 $7/8$ 。

111 學年度官方數學試卷，第 4 頁，題號 KH111-P12，原始試卷連結

16 / 40 · KH111-P14

內點到三邊距離的面積恆等式

111 學年度 (2022) · 二、計算證明題第 14 題

原題

P 為銳角 $\triangle ABC$ 內部一點，設 P 到邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 的距離分別為 p_a, p_b, p_c ；且 $\triangle ABC$ 在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 邊上的高分別為 h_a, h_b, h_c 。試證明：

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = 1。$$

14. P 為銳角 $\triangle ABC$ 內部一點，設 P 到邊 $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ ， $\overline{AB}$ 的距離分別為 p_a ， p_b ， p_c ；

且 $\triangle ABC$ 在 $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ ， $\overline{AB}$ 邊上的高分別為 h_a ， h_b ， h_c 。試證明： $\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = 1$ 。(8%)

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 4 頁。

作答結果

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = 1。$$

以下為依面積分割所作的證明，不是校方官方解答。

解題切入點

同樣以 BC 為底時，小三角形 PBC 與大三角形 ABC 的面積比就是高的比 p_a/h_a 。三個小三角形恰好拼成大三角形，三個比值相加自然等於 1。

完整推導

1. 記三角形 XYZ 的面積為 $[XYZ]$ ，並令

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c。$$

2. $\triangle PBC$ 與 $\triangle ABC$ 使用同一條底邊 BC 。前者對 BC 的高是 p_a ，後者對 BC 的高是 h_a ，因此

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{\frac{1}{2}ap_a}{\frac{1}{2}ah_a} = \frac{p_a}{h_a}。$$

3. 完全相同地，分別以 CA 、 AB 為共同底邊，可得

$$\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{p_b}{h_b}, \quad \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{p_c}{h_c}。$$

4. 因為 P 在 $\triangle ABC$ 內部，連結 PA, PB, PC 後， $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 、 $\triangle PAB$ 內部互不重疊，且恰好鋪滿 $\triangle ABC$ 。所以

$$[PBC] + [PCA] + [PAB] = [ABC]。$$

5. 將等式兩邊除以正數 $[ABC]$ ，並代入第 2、3 步的三個面積比，即得

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = 1。$$

證畢。

另一種驗算

用向量行列式驗算面積分割。定義有向面積

$$[XYZ]_s = \frac{1}{2} \det(Y - X, Z - X)。$$

直接把三項展開，所有含 P 的項成對消去，得到恆等式

$$[PBC]_s + [PCA]_s + [PAB]_s = [ABC]_s。$$

由於 P 在三角形內部，依 A, B, C 的同一繞行方向，左邊三個有向面積都與右邊同號，所以可改成普通面積。再以「同底面積比等於高的比」把三項分別換成 $p_a/h_a, p_b/h_b, p_c/h_c$ ，仍得到總和為 1。這個代數恆等式也確認沒有重疊計算或漏掉任何區域。

容易出錯的地方

- p_a 是點 P 到直線 BC 的垂直距離，不是線段 PA 。
- 三個比值的底邊要一一配對： p_a/h_a 對應 BC ，其餘循環類推。
- 使用普通面積相加需要 P 在三角形內部；這正是原題的重要條件。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

二次方程根的降次運算

112 學年度 (2023) · 一、填充題第 1 題

原題

已知 a 為二次方程式 $3x^2 - 2x - 663 = 0$ 的一個解，試求 $(3a^3 - (664\frac{1}{3})a - 445)^3$ 的值。

1. 已知 a 為二次方程式 $3x^2 - 2x - 663 = 0$ 的一個解，試求 $(3a^3 - 664\frac{1}{3}a - 445)^3$ 的值。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

作答結果

−27。這是依原題條件推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

不要解出根號很大的 a 。利用 $3a^2 = 2a + 663$ 把 a^3 降次；原題的 $664\frac{1}{3}$ 是帶分數 $664 + \frac{1}{3} = \frac{1993}{3}$ ，係數正好全部消去。

完整推導

1. 先釐清原卷排版：

$$664\frac{1}{3} = 664 + \frac{1}{3} = \frac{1993}{3},$$

不是 $664 \times \frac{1}{3}$ 。2. 因為 a 是 $3x^2 - 2x - 663 = 0$ 的解，所以

$$3a^2 = 2a + 663。$$

3. 兩邊乘以 a ，再用同一關係把 a^2 降次：

$$\begin{aligned} 3a^3 &= 2a^2 + 663a \\ &= \frac{2}{3}(2a + 663) + 663a。 \\ &= \frac{1993}{3}a + 442 \end{aligned}$$

4. 因此括號內為

$$3a^3 - \frac{1993}{3}a - 445 = 442 - 445 = -3。$$

5. 題目還要求三次方，所以答案是

$$(-3)^3 = -27。$$

另一種驗算

可以先建立一個不必逐步代換的恆等式：

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 - 2x - 663) = 3x^3 - \frac{1993}{3}x - 442。$$

把 $x = a$ 代入，左邊因 a 是原二次方程的根而等於 0，所以

$$3a^3 - \frac{1993}{3}a = 442。$$

原式括號仍等於 $442 - 445 = -3$ ，三次方仍是 -27 。這也說明無論 a 是原方程的哪一根，答案都相同。

容易出錯的地方

- $664\frac{1}{3}$ 是帶分數 $1993/3$ ；若誤當成 $664/3$ ，整個消去結構會被破壞。
- 題目括號內第一項是 $3a^3$ ，不是 $2a^3$ 。
- 算出括號內為 -3 後仍要立方，最後答案是 -27 。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

112 學年度官方數學試卷，第 1 頁 · 題號 KH112-F01 · 原始試卷連結

18 / 40 · KH112-F03

根式條件與平方和

112 學年度 (2023) · 一、填充題第 3 題

原題

已知實數 a, b, c 滿足 $a \geq 0$ 、 $b \geq 1$ 、 $c \geq -1$ 以及

$$a + 4b + c + 3 = 2\sqrt{a} + 4\sqrt{b-1} + 4\sqrt{c+1}。$$

試求 $a + b + c$ 的值。

3. 已知實數 a, b, c 滿足 $a \geq 0$ ， $b \geq 1$ ， $c \geq -1$ 以及 $a + 4b + c + 3 = 2\sqrt{a} + 4\sqrt{b-1} + 4\sqrt{c+1}$ ，試求 $a + b + c$ 的值。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

作答結果

$\frac{21}{4}$ 。這是依原題條件推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

根號的定義域讓我們可設 $u = \sqrt{a}$ 、 $v = \sqrt{b-1}$ 、 $w = \sqrt{c+1}$ 。移項後恰好是三個平方和；平方和等於零時，每一平方都必須為零。

完整推導

1. 由題設範圍，令

$$u = \sqrt{a} \geq 0, \quad v = \sqrt{b-1} \geq 0, \quad w = \sqrt{c+1} \geq 0。$$

則

$$a = u^2, \quad b = v^2 + 1, \quad c = w^2 - 1。$$

2. 把題目等式右邊移到左邊並代入：

$$u^2 + 4v^2 + w^2 + 6 - 2u - 4v - 4w = 0。$$

3. 分別配方：

$$\begin{aligned} & u^2 - 2u + 4v^2 - 4v + w^2 - 4w + 6 \\ &= (u-1)^2 + (2v-1)^2 + (w-2)^2。 \end{aligned}$$

所以

$$(u-1)^2 + (2v-1)^2 + (w-2)^2 = 0。$$

4. 每一項都是非負實數，總和為 0 只能三項都為 0。故

$$u = 1, \quad v = \frac{1}{2}, \quad w = 2。$$

5. 回復原變數：

$$a = 1, \quad b = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}, \quad c = 2^2 - 1 = 3。$$

因此

$$a + b + c = 1 + \frac{5}{4} + 3 = \frac{21}{4}。$$

另一種驗算

不直接寫成平方和，也可用三個最小值來檢查。對 $u, v, w \geq 0$ ，

$$u^2 - 2u \geq -1, \quad 4v^2 - 4v \geq -1, \quad w^2 - 4w \geq -4,$$

等號分別只在 $u = 1, v = 1/2, w = 2$ 成立。題目移項後正是

$$(u^2 - 2u) + (4v^2 - 4v) + (w^2 - 4w) + 6 = 0。$$

三個括號的下界相加為 -6 ，所以等式要等於 0 ，三項必須同時取到各自下界。於是仍得 $(a, b, c) = (1, 5/4, 3)$ ，總和 $21/4$ 。

容易出錯的地方

- 由 $v = \sqrt{b-1}$ 得到的是 $b = v^2 + 1$ ，不能寫成 $b = v^2 - 1$ 。
- 平方和為零必須先確認各項是實數平方；原題的三個範圍條件正好保證根號有意義。
- 求得 u, v, w 後要換回 a, b, c ，不能把 $u + v + w$ 當成答案。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。答案一致；Fable 第一個配方等號漏減原式右側根式。採用原稿經獨立覆核的「左側減右側等於平方和」推導。

112 學年度官方數學試卷，第 1 頁，題號 KH112-F03，原始試卷連結

19 / 40 · KH112-F04

集合中的乘十七互斥選取

112 學年度 (2023) · 一、填充題第 4 題

原題

數學中有個基本概念稱作「集合」，是一個收集特定元素所形成的物件。例如， $A = \{1, 2, 3\}$ 這個集合收集了 $1, 2, 3$ 這三個正整數，又可以說 $1, 2, 3$ 這三個元素「屬於」集合 A 。此外，如果集合 B 的所有元素也都屬於集合 A ，則說集合 B 是集合 A 的「子集」。例如， $B_1 = \{1, 2\}$ 、 $B_2 = \{3, 2\}$ 都是集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的子集。根據上述語言，如果集合 $U = \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ ，且集合 M 滿足「只要 n 屬於 M ， $17n$ 便不屬於 M 」，則所有 U 的子集中，擁有最多元素的 M 有多少個元素？

4. 數學中有個基本概念稱作「集合」，是一個收集特定元素所形成的物件。例如， $A = \{1, 2, 3\}$ 這個集合收集了 $1, 2, 3$ 這三個正整數，又可以說 $1, 2, 3$ 這三個元素「屬於」集合 A 。此外，如果集合 B 的所有元素也都屬於集合 A ，則說集合 B 是集合 A 的「子集」。例如， $B_1 = \{1, 2\}$ ， $B_2 = \{3, 2\}$ 都是集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的子集。根據上述語言，如果集合 $U = \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ ，且集合 M 是滿足「只要 n 屬於 M ， $17n$ 便不屬於 M 」的所有 U 的子集中擁有最多元素的一個，試問集合 M 的元素個數有多少個？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

作答結果

1911 個元素。這是依原題條件推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

把每個正整數依連乘 17 串成鏈 $r, 17r, 17^2r, \dots$ 。同一條鏈上不能選相鄰兩項。逐鏈取路徑圖的最大獨立集，再把各鏈的上限相加。

完整推導

1. 每個 $n \in U$ 都可唯一寫成

$$n = 17^k r,$$

其中 $17 \nmid r$ 。固定 r 後， $r, 17r, 17^2r, \dots$ 形成一條鏈。題目條件就是同一條鏈中不能同時選相鄰兩項。2. 因 $17^3 = 4913 > 2023$ ，鏈長最多為 3。3. 若 $1 \leq r \leq 7$ ，則 $r, 17r, 289r$ 都不超過 2023，有 7 條長度 3 的鏈。每條最多選第 1、3 項，共 2 個。4. 若 $8 \leq r \leq 119$ 且 $17 \nmid r$ ，則只有 $r, 17r$ 在 U 中，是長度 2 的鏈。8 到 119 共 112 個數，其中有 7 個 17 的倍數，所以這類鏈有

$$112 - 7 = 105$$

條，每條最多選 1 個。5. 不被 17 整除的數共有

$$2023 - \left\lfloor \frac{2023}{17} \right\rfloor = 2023 - 119 = 1904$$

個。其中 $r \leq 119$ 且不被 17 整除者有 $119 - 7 = 112$ 個，所以剩下

$$1904 - 112 = 1792$$

條長度 1 的鏈，每條可選 1 個。6. 因此任何合格集合都至多有

$$7 \cdot 2 + 105 \cdot 1 + 1792 \cdot 1 = 1911$$

個元素。7. 這個上限確實可達到：選取所有不被 17 整除的數，再加入 $289, 578, 867, 1156, 1445, 1734, 2023$ ，即所有 $289r$ ($1 \leq r \leq 7$)。所選元素若乘以 17，不是落在未選的「恰含一個因數 17」那一層，就是已超過 2023。故這個集合合法且有 $1904 + 7 = 1911$ 個元素。

另一種驗算

用互不重疊的配對作上界。考慮所有 $1 \leq r \leq 119$ 且 $17 \nmid r$ 的 r ，共有 $119 - 7 = 112$ 個。把每個 r 與 $17r$ 配成一對 $\{r, 17r\}$ ；這 112 對彼此互不重疊，而且每一對至多能選一個。因此 U 的 2023 個元素中至少要漏掉 112 個，故

$$|M| \leq 2023 - 112 = 1911。$$

再取 M 為「所有不被 17 整除的數」加上「所有不超過 2023 的 289 倍數」，正好只漏掉恰含一個因數 17 的那 112 個數，且滿足條件。所以配對法也獨立得到最大值 1911。

容易出錯的地方

- 條件只禁止 n 與 $17n$ 同時入選，不是禁止所有 17 的倍數。像 289 可以和 1 同時選，因為它們不是相鄰的一倍關係。
- 只提出一個有 1911 個元素的集合只能證明下界；還需用鏈或互斥配對證明任何集合都不能更大。

- 計算 8 到 119 中可作鏈首的數時，要排除 17, 34, ..., 119 共 7 個。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。答案一致；Fable 鏈長計算將 3×7 誤寫成 17×7 。採用 $2023 - 3 \times 7 - 2 \times 105 = 1792$ 的正確分組。

112 學年度官方數學試卷，第 1 頁，題號 KH112-F04，原始試卷連結

20 / 40 · KH112-F05

符號金字塔的計數

112 學年度 (2023) · 一、填充題第 5 題

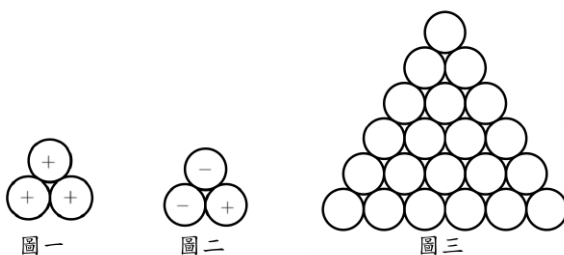
原題

有一個填符號遊戲，只要在最下層的 ○ 中填入符號「+」或「-」，則上層中所有的 ○ 就會自動顯示符號「+」或「-」其中之一。規則如下：

- 若相鄰的兩個 ○ 中符號相同，則上面的 ○ 顯示「+」，如圖一所示。
- 若相鄰的兩個 ○ 中符號不同，則上面的 ○ 顯示「-」，如圖二所示。

在圖三中，若要使得最上層的 ○ 中顯示「+」，則最下層有多少種填法？圖三的六層三角形配置（最下層有 6 個圓）請參考原題圖。

- 有一個填符號遊戲，只要在最下層的 ○ 中填入符號「+」或「-」，則上層中所有的 ○ 就會自動顯示符號「+」或「-」其中之一。規則如下：
 - 若相鄰的兩個 ○ 中符號相同，則上面的 ○ 顯示「+」，如圖一所示
 - 若相鄰的兩個 ○ 中符號不同，則上面的 ○ 顯示「-」，如圖二所示
 在圖三中，若要使得最上層的 ○ 中顯示「+」，則最下層有多少種填法？



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 1 頁。

作答結果

32 種。這是依題目條件推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

把「+」記為 1、「-」記為 -1，則上層規則正是相鄰兩數相乘。重複相乘後，頂端是底排各符號按二項係數次方的乘積；只需看次方的奇偶。

完整推導

1. 把底層由左到右六個符號記成 $s_1, s_2, \dots, s_6$ ，其中「+」代表 1，「-」代表 -1。相同符號相乘為 1，不同符號相乘為 -1，所以每個上層圖就是下面相鄰兩數的乘積。
2. 第一層往上一次後，指數是 $(1, 1)$ ；再往上時，相鄰兩項相乘，指數相加。因此指數逐層依 Pascal 規則形成二項係數。六個底層圖到頂端共經過五次，故頂端值為

$$s_1^{\binom{5}{0}} s_2^{\binom{5}{1}} s_3^{\binom{5}{2}} s_4^{\binom{5}{3}} s_5^{\binom{5}{4}} s_6^{\binom{5}{5}}.$$

3. 第五列二項係數為 $(1, 5, 10, 10, 5, 1)$ 。因每個 $s_i^2 = 1$ ，偶數次方都等於 1，所以頂端化簡為

$$s_1 s_2 s_5 s_6.$$

4. 要讓頂端是「+」，條件就是 $s_1 s_2 s_5 s_6 = 1$ 。先任選 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 ，共有 $2^5 = 32$ 種；之後 s_6 被唯一決定為 $s_1 s_2 s_5$ 。每一種前五格都恰好對應一種合格底排，沒有重複也沒有遺漏。
5. 因此最下層共有 32 種填法。

另一種驗算

使用一一配對，不展開二項係數。全部底排共有 $2^6 = 64$ 種。固定任一底排，只翻轉最左邊的第一個符號：往上一層時，只有最左邊的圖會翻轉；其餘圖都由未改變的相鄰底格產生。逐層重複同一觀察，每一層都恰有最左邊的圖翻轉，最後頂端也必定翻轉。因此每個頂端為「+」的填法，都與唯一一個頂端為「-」的填法成對，且這個翻轉操作做兩次會回到原填法。兩類數量相等，所以各有 $64/2 = 32$ 種。

容易出錯的地方

- 完整原題圖三的最下層是 6 個圖，不是 5 個；層數與底排格數必須直接看圖確認。
- 規則不是把正負號作一般加法，而是「相同變正、相異變負」，用 ± 1 表示時對應乘法。
- 只說『顯然一半』不夠；配對法必須指出翻轉哪一格、為何頂端必翻轉，以及操作可逆。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。

112 學年度官方數學試卷，第 1 頁·題號 KH112-F05·原始試卷連結

21 / 40 · KH112-F06

折返斜線數表定位

112 學年度 (2023) · 一、填充題第 6 題

原題

將正整數 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$ 依右圖規則排列，若將橫排稱為列，直排稱為行，我們可以用列與行來描述某個正整數的位置。例如：第 2 列第 3 行的數字為 9。若 2023 在第 m 列第 n 行，試求數對 (m, n) 。

6. 將正整數 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$ 依下列規則排列，若將橫排稱為列，直排稱為行，我們可以用列與行來描述某個正整數的位置。例如：第2列第3行的數字為9。若2023在第 m 列第 n 行，試求數對 (m, n) 。

1	3	4	10	11	21	...
2	5	9	12	20		
6	8	13	19			
7	14	18				
15	17					
16						
⋮						

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第2頁。

作答結果

$(m, n) = (58, 7)$ 。這是依原題數表推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

數字沿著左下到右上的斜對角線來回折返。第 d 條斜線有 d 格，最後一數是三角形數 $T_d = d(d+1)/2$ ；先定位2023落在哪一條斜線，再依奇偶決定方向。

完整推導

1. 由原圖可見，同一斜線上的格子滿足

$$m + n - 1 = d,$$

而第 d 條斜線共有 d 個數。前 d 條斜線共放入

$$T_d = 1 + 2 + \dots + d = \frac{d(d+1)}{2}$$

個數。2. 計算相鄰三角形數：

$$T_{63} = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016, \quad T_{64} = \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080。$$

因此2023位於第64條斜線。3. 它是該斜線的第

$$2023 - 2016 = 7$$

個數。4. 從原圖的小斜線可核對：偶數編號的斜線由左下往右上填。例如第4條斜線是7, 8, 9, 10，座標依序為 $(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)$ 。所以第64條斜線第7個數的行座標是 $n = 7$ ，列座標每前進一格減1，為

$$m = 64 - 7 + 1 = 58。$$

故

$$(m, n) = (58, 7)。$$

另一種驗算

從 $T_{63} = 2016$ 之後直接追位置。偶數斜線第 64 條的第一格在 $(64, 1)$ ，數字是 2017。接下來每加 1 就往右上移一格，即座標變成 $(m-1, n+1)$ 。由 2017 到 2023 共增加 6 次，因此

$$(64, 1) + 6(-1, +1) = (58, 7)。$$

再檢查 $58 + 7 - 1 = 64$ ，確實仍在第 64 條斜線。

容易出錯的地方

- 原題把橫排稱為「列」、直排稱為「行」，所以 (m, n) 是（列，行），不要沿用其他課本相反的列行慣例。
- 第 64 條斜線的第 1 個數是 2017；第 7 個只移動 6 步。
- 斜線方向交替，若把偶數斜線方向反過來會得到對調的錯誤座標。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

112 學年度官方數學試卷，第 2 頁·題號 KH112-F06·原始試卷連結

22 / 40 · KH112-F07

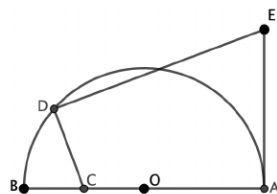
半圓與垂直交點距離

112 學年度 (2023) · 一、填充題第 7 題

原題

如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓， O 為圓心， C 為 $\overline{OB}$ 中點。 $\overline{AE}$ 為圓 O 的切線， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AE} = \sqrt{7}$ ；若 D 為此半圓上的一點且 $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ ，試求 $\overline{CD}$ 的長。

7. 如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓， O 為圓心， C 為 $\overline{OB}$ 中點。 $\overline{AE}$ 為圓 O 的切線， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AE} = \sqrt{7}$ ，若 D 為此半圓上的一點且 $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ ，試求 $\overline{CD}$ 的長。



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

$CD = \sqrt{2}$ 。這是依原題文字與原圖中 D 的位置推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

編按：由原圖可見， D 為不同於 A, B 的弧內點；這是附圖關係的說明，不是原卷另印的文字。 CE 可在解題時自行連結，原圖並未畫出此線段。

設直徑在座標軸上。圓方程與垂直的內積方程相減後會得到一條一次式，再解出原圖所示的非端點交點 D 。

完整推導

1. 依原圖取

$$B = (0, 0), \quad O = (2, 0), \quad A = (4, 0)。$$

因 C 是 OB 中點， $C = (1, 0)$ 。 AE 是過 A 的切線，且 $AE = \sqrt{7}$ 、 E 在直徑上方，所以 $E = (4, \sqrt{7})$ 。2. 設原圖所示的弧內點 $D = (x, y)$ ，其中 $y > 0$ 。因圓心是 $(2, 0)$ 、半徑是 2，

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4,$$

也就是

$$x^2 - 4x + y^2 = 0。 \quad (1)$$

3. $CD \perp DE$ ，所以向量內積為零：

$$(x - 1)(x - 4) + y(y - \sqrt{7}) = 0。$$

展開得

$$x^2 - 5x + 4 + y^2 - \sqrt{7}y = 0。 \quad (2)$$

4. 用式 (2) 減式 (1)，得到

$$x + \sqrt{7}y = 4。 \quad (3)$$

代入 $x = 4 - \sqrt{7}y$ 到式 (1)：

$$8y^2 - 4\sqrt{7}y = 0,$$

即

$$4y(2y - \sqrt{7}) = 0。$$

因原圖的 D 是弧內非端點， $y > 0$ ，故

$$y = \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad x = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}。$$

5. 因此

$$CD = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7}{4}} = \sqrt{2}。$$

另一種驗算

利用兩個等半徑圓驗算。 $CA = 3$ 、 $AE = \sqrt{7}$ 且 $CA \perp AE$ ，所以

$$CE = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = 4。$$

由 $CD \perp DE$ ，依泰勒斯定理， D 在以 CE 為直徑的圓上； A 也因 $CA \perp AE$ 在此圓上。這個圓的半徑是 $CE/2 = 2$ ，恰與原半圓所屬圓的半徑相同。令第二圓圓心為 M ，則

$$M = \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2} \right)。$$

兩個等半徑圓的公共弦 AD 被兩圓心連線 OM 垂直平分，而且公共弦中點就是 OM 中點

$$N = \left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4} \right)。$$

所以 D 是 A 對 N 的對稱點：

$$D = 2N - A = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2} \right)，$$

再次得到 $CD = \sqrt{2}$ 。

容易出錯的地方

- 聯立方程還會出現 $y = 0, x = 4$ ，即端點 A ；原題附圖把 D 標在弧內且與 A 分開，故取另一交點。若完全忽略附圖，文字條件會留下這個退化候選。
- C 是 OB 的中點，不是 AB 的中點；在所取座標中 $C = (1, 0)$ 。
- AE 為切線，所以它與半徑 OA 垂直；原圖中 E 位於 A 正上方。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。答案與獨立原圖覆核一致。早期轉錄圖說及 Fable 輸入誤稱原圖畫有 CE ；原圖沒有此線，已在最終編按明說是可自行加畫的輔助線。原始輸入與回覆留存，不冒稱無瑕疵盲測。

112 學年度官方數學試卷，第 2 頁·題號 KH112-F07·原始試卷連結

23 / 40 · KH112-F11

直線上的等腰三角形

112 學年度 (2023) · 一、填充題第 11 題

原題

在直角坐標平面上， O 為原點，方程式 $3x - y = 0$ 所表示的圖形為直線 L ，點 A 的坐標為 $(0, 3)$ ，點 P 在直線 L 上，若 $\triangle AOP$ 為等腰三角形，試求點 P 的坐標。（答案不止一解）

11. 在直角坐標平面上， O 為原點，方程式 $3x - y = 0$ 所表示的圖形為直線 L ，點 A 的坐標為 $(0, 3)$ ，點 P 在直線 L 上，若 $\triangle AOP$ 為等腰三角形，試求點 P 的坐標。(答案不止一解)

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

擬答：

$$P = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{9\sqrt{10}}{10} \right), \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{9\sqrt{10}}{10} \right), \left(\frac{9}{5}, \frac{27}{5} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

解題切入點

以 $P = (t, 3t)$ 參數化直線，分別檢查 $OA = OP$ 、 $OA = AP$ 、 $OP = AP$ 三種等腰情形；由方程式得到的 $t = 0$ 會使 $P = O$ ，必須作為退化情形排除。

完整推導

設 $P = (t, 3t)$ 。三邊長平方為

$$OA^2 = 9, \quad OP^2 = 10t^2, \quad AP^2 = t^2 + (3t - 3)^2 = 10t^2 - 18t + 9.$$

情形一： $OA = OP$ 。

$$9 = 10t^2 \implies t = \pm \frac{3}{\sqrt{10}},$$

得到

$$P = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{9\sqrt{10}}{10} \right) \text{ 或 } \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{9\sqrt{10}}{10} \right).$$

情形二： $OA = AP$ 。

$$9 = 10t^2 - 18t + 9 \implies 2t(5t - 9) = 0.$$

其中 $t = 0$ 時 $P = O$ ，無法形成三角形，故捨去； $t = 9/5$ 給出

$$P = \left(\frac{9}{5}, \frac{27}{5} \right).$$

情形三： $OP = AP$ 。

$$10t^2 = 10t^2 - 18t + 9 \implies t = \frac{1}{2},$$

故

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

任何等腰三角形都必屬於上述三種邊長配對之一，四個保留的 t 值互異且皆非 0，因此解已列完。

另一種驗算

幾何軌跡驗算。固定邊 $OA = 3$ ，並把等腰條件看成三條軌跡與直線 $L: y = 3x$ 的交點。

1. $OP = OA$: P 在以 O 為圓心、半徑 3 的圓上。聯立 $x^2 + y^2 = 9$ 與 $y = 3x$ ，得 $10x^2 = 9$ ，產生兩個正負交點。
2. $AP = AO$: P 在以 A 為圓心、半徑 3 的圓上。聯立 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ 與 $y = 3x$ ，得 $2x(5x - 9) = 0$ ；交點 O 是退化點，另一交點為 $(9/5, 27/5)$ 。
3. $AP = OP$: P 在 OA 的垂直平分線 $y = 3/2$ 上；與 $y = 3x$ 相交於 $(1/2, 3/2)$ 。

三個軌跡已覆蓋所有等腰配置，交點清單與主解一致。

容易出錯的地方

- 只檢查其中一種相等邊，會漏掉其餘座標。
- 把 $t = 0$ 當答案；此時 $P = O$ ，三角形退化為線段。
- 負的直線參數仍對應直線上的合法點，不能只取正根。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。

112 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH112-F11，原始試卷連結

24 / 40 · KH112-P16

調和和不是整數

112 學年度 (2023) · 二、計算證明題第 16 題

原題

證明 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{64}$ 不是一個正整數。

16. 說明 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{64}$ 不是一個正整數。(8%)

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

S 不是正整數。以下為依整除奇偶性所作的證明，不是校方官方解答。

解題切入點

把所有分數乘上 1 到 64 的最小公倍數。只有分母 64 含有最高次的因數 2^6 ，所以清分母後恰有一項為奇數，其餘全為偶數，總和必為奇數；這與 S 是整數時應有的整除性衝突。

完整推導

1. 令

$$L = \text{lcm}(1, 2, 3, \dots, 64)。$$

因 $64 = 2^6$ ，而 1 到 63 中每個數所含的 2 的次方最多只有 2^5 ，所以 L 恰含因數 2^6 。2. 乘上 L 清分母：

$$LS = \sum_{k=1}^{64} \frac{L}{k}。$$

3. 當 $k = 64$ 時， $L/64$ 是奇數：因為 L 中的 2^6 已被 64 完全約掉。

4. 當 $1 \leq k \leq 63$ 時， k 最多含 2^5 ，所以 L/k 至少還含一個因數 2，必為偶數。

5. 因此 LS 是「一個奇數加上許多偶數」，所以 LS 是奇數。

6. 反設 S 是正整數。那麼 $LS = L \cdot S$ 必被 L 整除；尤其 L 是偶數，所以 LS 必為偶數。這與第 5 步矛盾。故 S 不是正整數。證畢。

另一種驗算

改用質數 61 作獨立驗算。仍令 $L = \text{lcm}(1, 2, \dots, 64)$ 。在 1 到 64 中，只有分母 61 是 61 的倍數。因此在

$$LS = \sum_{k=1}^{64} \frac{L}{k}$$

中， $L/61$ 不被 61 整除，而每個 $k \neq 61$ 的 L/k 都仍含因數 61。所以 LS 除以 61 的餘數等於 $L/61$ 的非零餘數，亦即 $61 \nmid LS$ 。若 S 是整數，因 $61 \mid L$ ，就必有 $61 \mid LS$ ，矛盾。故 S 不可能是整數。

容易出錯的地方

- 不能只說和式介於兩個整數之間而不給精確界；整除奇偶法可直接完成證明。
- 64 是範圍內唯一含有 2^6 的分母，這個「唯一」是奇偶論證成立的關鍵。
- 清分母後要判斷的是每一個 L/k 的奇偶性，不是原分數 $1/k$ 的奇偶性。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

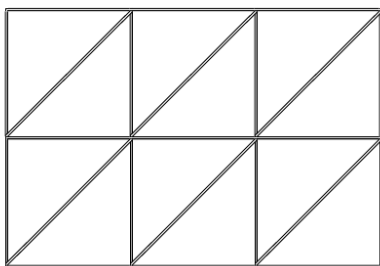
方格路徑的平均長度

113 學年度 (2024) · 一、填充題第 2 題

原題

如下圖，這是由六個邊長皆為 1 的正方形所組成的矩形路徑圖（排成 3×2 ；每個正方形都有一條由左下角連到右上角的對角線）。今規定從左下角頂點到右上角頂點只能走三種路徑：往上走、往右走、往右上斜走。請問所有走法的平均路徑長？

2. 如下圖，這是由六個邊長皆為 1 的正方形所組成的矩形路徑圖，今規定從左下角頂點到右上角頂點只能走三種路徑：往上走、往右走，往右上斜走。請問所有走法的平均路徑長？



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

擬答：

$$\frac{89 + 18\sqrt{2}}{25}.$$

解題切入點

依斜走次數 $d = 0, 1, 2$ 分類。每類以多重排列數計算走法，再用直走長 1、斜走長 $\sqrt{2}$ 加權求平均。

完整推導

設一條路徑使用 r 次向右、 u 次向上、 d 次向右上斜走。位移條件為

$$r + d = 3, \quad u + d = 2,$$

故 d 只能是 0、1、2。

- $d = 0$: $(r, u, d) = (3, 2, 0)$ ，共有 $5!/(3!2!) = 10$ 條，每條長 5。
- $d = 1$: $(r, u, d) = (2, 1, 1)$ ，共有 $4!/(2!1!1!) = 12$ 條，每條長 $3 + \sqrt{2}$ 。
- $d = 2$: $(r, u, d) = (1, 0, 2)$ ，共有 $3!/(1!0!2!) = 3$ 條，每條長 $1 + 2\sqrt{2}$ 。

總走法數為 $10 + 12 + 3 = 25$ ，總路徑長為

$$10 \cdot 5 + 12(3 + \sqrt{2}) + 3(1 + 2\sqrt{2}) = 89 + 18\sqrt{2}.$$

因此平均路徑長為

$$\boxed{\frac{89 + 18\sqrt{2}}{25}}.$$

另一種驗算

格點動態遞推驗算。 對格點 (i, j) 記 $N_{i,j}$ 為從 $(0, 0)$ 走到該點的走法數， $S_{i,j}$ 為這些走法的總長。邊界為 $N_{0,0} = 1$ 、 $S_{0,0} = 0$ ；若三個前驅存在，則

$$N_{i,j} = N_{i-1,j} + N_{i,j-1} + N_{i-1,j-1},$$

$$S_{i,j} = (S_{i-1,j} + N_{i-1,j}) + (S_{i,j-1} + N_{i,j-1}) + (S_{i-1,j-1} + \sqrt{2}N_{i-1,j-1}).$$

直邊新增長 1，斜邊新增長 $\sqrt{2}$ 。逐格算得

(i, j)	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(3, 1)$
N	3	5	7
S	$4 + \sqrt{2}$	$11 + 2\sqrt{2}$	$22 + 3\sqrt{2}$

以及

(i, j)	$(1, 2)$	$(2, 2)$	$(3, 2)$
N	5	13	25
S	$11 + 2\sqrt{2}$	$36 + 8\sqrt{2}$	$89 + 18\sqrt{2}$

因此終點平均為 $S_{3,2}/N_{3,2} = (89 + 18\sqrt{2})/25$ ，與分類法一致。

容易出錯的地方

- 把三種斜走次數當成三條路徑；實際共有 25 種步驟排列。
- 忘記每次斜走的長度是 $\sqrt{2}$ 。
- 只平均三個代表長度，沒有按各類走法數加權。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。

113 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH113-F02，原始試卷連結

26 / 40 · KH113-F03

兩根式方程的完整解

113 學年度 (2024) · 一、填充題第 3 題

原題

試求解方程式

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3.$$

全對才給分。

3. 試求解方程式 $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3$ ，全對才給分。

官方原卷影像・保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

$x = \pm \frac{3\sqrt{5}}{10}$ 。這是依原題條件推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

兩個根式平方後的總和很簡單。先平方一次求出兩根式乘積，再平方一次；最後必須代回或用正值性檢查，排除平方造成的假根。

完整推導

1. 令

$$A = \sqrt{x^2 + 2x + 2}, \quad B = \sqrt{x^2 - 2x + 2}。$$

因

$$x^2 \pm 2x + 2 = (x \pm 1)^2 + 1 > 0,$$

所以 A, B 對所有實數 x 都有定義且為正。題目是 $A + B = 3$ 。2. 平方一次：

$$A^2 + B^2 + 2AB = 9。$$

而

$$A^2 + B^2 = (x^2 + 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) = 2x^2 + 4,$$

故

$$AB = \frac{5 - 2x^2}{2}。 \quad (1)$$

3. 另一方面，

$$A^2 B^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = x^4 + 4。$$

將式 (1) 平方，得到

$$x^4 + 4 = \frac{(5 - 2x^2)^2}{4}。$$

乘以 4 並展開：

$$4x^4 + 16 = 25 - 20x^2 + 4x^4,$$

所以

$$20x^2 = 9, \quad x^2 = \frac{9}{20}。$$

因此候選解是

$$x = \pm \frac{3}{2\sqrt{5}} = \pm \frac{3\sqrt{5}}{10}。$$

4. 驗根：對這兩個候選，式 (1) 右邊為 $(5 - 9/10)/2 = 41/20 > 0$ ，且由已得關係有

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB = 9。$$

因 $A + B > 0$ ，必有 $A + B = 3$ ，所以兩個候選都是真解。

另一種驗算

把根式看成距離。

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{(x+1)^2 + 1}, \quad \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1}。$$

它們分別是點 $(x, 1)$ 到焦點 $(-1, 0)$ 、 $(1, 0)$ 的距離。距離和為 3 的軌跡是橢圓，長軸半長 $a = 3/2$ ，焦距半長 $c = 1$ ，所以短軸半長平方

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}。$$

橢圓方程為

$$\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{5/4} = 1。$$

題目中的點有 $y = 1$ ，代入得

$$\frac{4x^2}{9} + \frac{4}{5} = 1，$$

故 $x^2 = 9/20$ ，仍得到 $x = \pm 3\sqrt{5}/10$ 。

容易出錯的地方

- 題目寫「全對才給分」，所以正、負兩個對稱解都必須列出。
- 連續平方可能引入假根；最後要利用 $A, B > 0$ 回查 $A + B = 3$ 。
- 乘積化簡時 $(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = x^4 + 4$ ，中間的 $4x^2$ 正好消去。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

四捨五入打擊率的最小分母

113 學年度 (2024) · 一、填充題第 4 題

原題

在棒球比賽中，一位打者的打擊率定義為「總安打數除以總打擊數，四捨五入後取到小數點下第三位」。例如，雄雄本季的總打擊數為 318 次、總安打數為 99 次，則其打擊率為 0.311。今天，若阿中本季的打擊率為 0.399，試問阿中本季的「總打擊數」至少為多少？

4. 在棒球比賽中，一位打者的打擊率定義為「總安打數除以總打擊數，四捨五入後取到小數點下第三位」。例如，雄雄本季的總打擊數為 318 次，總安打數為 99 次，則其打擊率為 0.311。今天，若阿中本季的打擊率為 0.399，試問阿中本季的「總打擊數」至少為多少？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

138 次；此時可有 55 支安打，因 $55/138 \approx 0.3985507$ ，四捨五入為 0.399。這是依原題條件推導的擬答，不是校方官方答案。

解題切入點

把四捨五入條件寫成精確區間，再和較簡單的 $0.4 = 2/5$ 比較。若總打擊數為 N 、安打數為 H ，整數 $2N - 5H$ 會被夾在很窄的範圍，足以證明 $N < 138$ 都不可能。

完整推導

1. 設總打擊數為正整數 N ，總安打數為整數 H 。四捨五入到小數點下第三位得到 0.399，精確等價於

$$0.3985 \leq \frac{H}{N} < 0.3995,$$

也就是

$$\frac{797}{2000} \leq \frac{H}{N} < \frac{799}{2000}。 \quad (1)$$

上端不含等號，因為 0.3995 會四捨五入成 0.400。2. 式 (1) 顯示 $H/N < 0.4 = 2/5$ 。令

$$d = 2N - 5H。$$

則 d 是正整數，而且

$$\frac{d}{5N} = \frac{2}{5} - \frac{H}{N}。$$

由式 (1) 可得

$$0.0005 < \frac{d}{5N} \leq 0.0015,$$

所以

$$\frac{N}{400} < d \leq \frac{3N}{400} \quad (2)$$

3. 若 $N \leq 133$ ，則 $3N/400 < 1$ 。式 (2) 卻要求正整數 $d < 1$ ，不可能。

4. 只剩檢查 $134 \leq N \leq 137$ 。此時式 (2) 迫使 $d = 1$ 。由

$$2N - 5H = 1$$

取模 5，得 $2N \equiv 1 \pmod{5}$ ，亦即 $N \equiv 3 \pmod{5}$ 。但 134, 135, 136, 137 都不是除以 5 餘 3，所以也不可能。故 $N \geq 138$ 。5. 當 $N = 138$ 時取 $H = 55$ 。精確比較：

$$\frac{55}{138} - \frac{797}{2000} = \frac{14}{276000} > 0,$$

且

$$\frac{799}{2000} - \frac{55}{138} = \frac{262}{276000} > 0。$$

因此 $55/138$ 落在式 (1) 的區間內，確實四捨五入為 0.399。所以最少總打數是 138。

另一種驗算

依 N 除以 5 的餘數直接檢查最靠近 0.4、但小於 0.4 的分數。寫 $N = 5q + r$ 。為使 H/N 儘量接近 0.4，各餘數類能取的最大 H 與 $0.4N - H$ 分別為：

- $r = 0$ ：最大 $H = 2q - 1$ ，差 1；
- $r = 1$ ：最大 $H = 2q$ ，差 0.4；
- $r = 2$ ：最大 $H = 2q$ ，差 0.8；
- $r = 3$ ：最大 $H = 2q + 1$ ，差 0.2；
- $r = 4$ ：最大 $H = 2q + 1$ ，差 0.6。要使 $H/N \geq 0.3985$ ，必須 $0.4 - H/N \leq 0.0015$ 。最有利的是 $r = 3$ ，此時要求 $0.2/N \leq 0.0015$ ，即 $N \geq 133\frac{1}{3}$ 。第一個大於此界且除以 5 餘 3 的整數就是 138，並給 $H = (2N - 1)/5 = 55$ 。其餘餘數類的差更大，不會產生更小分母。

容易出錯的地方

- 顯示值 0.399 不代表真實比率恰等於 $399/1000$ ；所有落在 $[0.3985, 0.3995)$ 的比率都會顯示為 0.399。
- 上界 0.3995 不能含等號；四捨五入後它是 0.400。
- 找到 $55/138$ 還不夠，必須證明所有較小分母不可能；整數 d 的夾擠正是最小性的證明。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

兩層中位數的極值

113 學年度 (2024) · 一、填充題第 6 題

原題

已知奇數個數字的中位數定義如下：將這些數字由小到大排序之後，正中間那個數字稱為中位數。例如：
2, 3, 1, 6, 7, 4, 5 的中位數為 4。今有 $S_1, S_2, \dots, S_{343}$ 等 343 個「數字群」，每個「數字群」都恰包含了 7 個整數，且所有這 2401 個數皆不相同。若將 $S_1, S_2, \dots, S_{343}$ 各自的中位數分別記作 $m_1, m_2, \dots, m_{343}$ ，且 $m_1, m_2, \dots, m_{343}$ 的中位數為 M ，試問這 2401 個數當中，「最多」可能有多少個數小於 M ？

6. 已知奇數個數字的中位數定義如下：將這些數字由小到大排序之後，正中間那個數字稱為中位數。例如：

2, 3, 1, 6, 7, 4, 5 的中位數為 4。今有 $S_1, S_2, \dots, S_{343}$ 等 343 個「數字群」，每個「數字群」都恰包含了 7 個整數，

且所有這 2401 個數皆不相同。若將 $S_1, S_2, \dots, S_{343}$ 各自的中位數分別記作 $m_1, m_2, \dots, m_{343}$ ，且 $m_1, m_2, \dots, m_{343}$ 的

中位數為 M ，試問這 2401 個數當中，「最多」可能有多少個數小於 M ？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

1713 個。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

先依各組中位數與 M 的大小分成三類，逐類求一組中最多能有幾個數小於 M ；再給出能同時達到上界的配置，才算完成極值證明。

完整推導

把 343 個中位數由小到大排列。因為所有 2401 個整數互不相同，所以 $m_1, \dots, m_{343}$ 也互不相同；其中第 172 小者是 M 。因此恰有 171 個組中位數小於 M 、1 個組中位數等於 M 、171 個組中位數大於 M 。

- 若某組的中位數小於 M ，該組 7 個數都可以小於 M ，故至多貢獻 7 個。
- 中位數等於 M 的那一組， M 排第 4，所以恰有 3 個數小於 M 。
- 若某組的中位數大於 M ，排序後第 4 個已大於 M ，故前 3 個至多都小於 M ，但不可能有第 4 個也小於 M ；所以至多貢獻 3 個。

因此總數不超過

$$171 \cdot 7 + 3 + 171 \cdot 3 = 1197 + 3 + 513 = 1713.$$

還要證明這個上界能達到。取 $M = 0$ ，準備 1713 個互不相同的負整數及 687 個互不相同的正整數。把其中 1197 個負整數分成 171 組，每組 7 個；這些組的中位數全小於 0。再取 3 個負整數、0、3 個正整數組成中位數為 0 的一組。餘下的 513 個負整數分給其餘 171 組，每組 3 個；每組再配 4 個正整數，則其中位數都大於 0。此時恰有 1713 個數小於 M ，所以上界確實可達。

另一種驗算

用「必須不小於 M 的數」反算。中位數大於 M 的 171 組，每組至少有後 4 個大於 M ，共至少 684 個；中位數為 M 的一組還有 M 本身及其後 3 個，共 4 個不小於 M 。所以至少有 688 個數不小於 M ，小於 M 的數至多為 $2401 - 688 = 1713$ 。上述構造同時證明等號成立。

容易出錯的地方

- 只算出上界而沒有構造達到上界的例子，不能完成「最多」的證明。
- 中位數大於 M 的組仍可有前 3 個小於 M ，不能誤算成整組都大於 M 。
- 所有原始整數互不相同，故各組中位數也互不相同；這使得 M 兩側恰各有 171 個中位數。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

113 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH113-F06，原始試卷連結

29 / 40 · KH113-F08

連續正整數和

113 學年度 (2024) · 一、填充題第 8 題

原題

觀察 $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4 + 5 + 6 = 7 + 8$ ，因此 15 有 3 種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法。試問 420 有多少種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法？

8. 觀察 $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4 + 5 + 6 = 7 + 8$ ，因此 15 有 3 種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法。試問 420 有多少種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

7 種。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

正整數的連續和表示法數目等於它的奇數正因數個數；再扣掉只有一項的表示 420。也可直接由項數方程逐一列出。

完整推導

設連續正整數共有 k 項，首項為 a ，其中 $a \geq 1, k \geq 1$ 。則

$$420 = a + (a + 1) + \cdots + (a + k - 1) = \frac{k(2a + k - 1)}{2},$$

所以

$$840 = k(2a + k - 1).$$

每一種表示會把 840 分成一奇一偶的兩個因數；等價地，每個 420 的奇數正因數恰對應一種正整數連續和表示。簡要說明如下：若奇因數 $d < \sqrt{840}$ ，可取奇數項數 $k = d$ ；若 $d > \sqrt{840}$ ，則取偶數項數 $k = 840/d$ 。兩種情況由 $a = (840/k - k + 1)/2$ 得到正整數首項，而且互不重複。

分解

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

它的奇數正因數只由 3, 5, 7 的次方決定，共有

$$(1 + 1)^3 = 8$$

個。因此含一項的表示也算在內時共有 8 種；題目要求至少兩項，須去掉 420 本身，得到

$$8 - 1 = 7 \text{ 種。}$$

另一種驗算

直接列出七種，項數分別為 3, 5, 7, 8, 15, 21, 24：

$$\begin{aligned} 420 &= 139 + 140 + 141 \\ &= 82 + 83 + 84 + 85 + 86 \\ &= 57 + 58 + \cdots + 63 \\ &= 49 + 50 + \cdots + 56 \\ &= 21 + 22 + \cdots + 35 \\ &= 10 + 11 + \cdots + 30 \\ &= 6 + 7 + \cdots + 29. \end{aligned}$$

每列的「項數乘平均數」皆為 420；而因數論已證明總數不超過七，故沒有漏列。

容易出錯的地方

- 奇數因數個數包含單項表示 420，題目明定至少兩項，必須扣掉一種。
- 首項必須是正整數；使用公式時要同時檢查整數性與正性。
- 只列出幾個例子不能證明沒有其他表示，仍需因數對應的完備性。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

加法型整數數列

113 學年度 (2024) · 一、填充題第 10 題

原題

令 $\{a_n\}$ 為一整數數列，其中 $a_1 = 1$ ，且對於任意正整數 n, m ，皆滿足 $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ ，試求 $a_{50} = ?$

10. 令 $\{a_n\}$ 為一整數數列，其中 $a_1 = 1$ ，且對於任意正整數 n, m ，皆滿足 $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ ，試求 $a_{50} = ?$

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

$a_{50} = 1275$ 。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

找出一個差分恰為 mn 的二次式： $\frac{n(n-1)}{2}$ 。扣掉它之後，原條件化成正整數上的加法關係。

完整推導

令

$$b_n = a_n - \frac{n(n-1)}{2}.$$

因為

$$\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = mn,$$

所以題目的關係式化為

$$b_{m+n} = b_m + b_n.$$

又

$$b_1 = a_1 - 0 = 1.$$

在正整數上反覆使用加法關係，

$$b_n = b_{(n-1)+1} = b_{n-1} + b_1 = \cdots = nb_1 = n.$$

因此

$$a_n = b_n + \frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

代入 $n = 50$ ，

$$a_{50} = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275.$$

此公式也顯示每一項都是整數，符合題設。

另一種驗算

直接在原式取 $m = 1$ ：

$$a_{n+1} = a_n + a_1 + n = a_n + n + 1.$$

因此 $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 3, \dots, a_{50} - a_{49} = 50$ 。相加得

$$a_{50} = a_1 + (2 + 3 + \dots + 50) = 1 + \left(\frac{50 \cdot 51}{2} - 1 \right) = 1275.$$

再把 $a_n = n(n+1)/2$ 代回原關係，兩邊相等，完成獨立驗算。

容易出錯的地方

- 只由 $m = 1$ 算出數值後，若要主張通式，仍應代回任意 m, n 的原條件檢查。
- 容易把應扣除的二次式誤寫成 $n(n+1)/2$ ；其交叉差必須恰為 mn 。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

113 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH113-F10，原始試卷連結

31 / 40 · KH113-F12

質數條件與模運算

113 學年度 (2024) · 一、填充題第 12 題

原題

若 p 為質數，且 $q = 4^p + p^4 + 4$ 也是質數，試求所有可能的 q 值之總和？

12. 若 p 為質數，且 $q = 4^p + p^4 + 4$ 也是質數，試求所有可能的 q 值之總和？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

擬答：149。

解題切入點

先分開檢查例外質數 $p = 2, 3$ 。對任何 $p > 3$ 的質數，以模 3 證明 q 是大於 3 的 3 倍數。

完整推導

當 $p = 2$ 時，

$$q = 4^2 + 2^4 + 4 = 36,$$

不是質數。

若 p 是 $p \neq 3$ 的奇質數，則 $4 \equiv 1 \pmod{3}$ ，而 $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$ ，故

$$4^p \equiv 1, \quad p^4 \equiv 1, \quad 4 \equiv 1 \pmod{3}.$$

因而

$$q \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

此時 $q > 3$ ，所以是合數。

最後檢查 $p = 3$ ：

$$q = 4^3 + 3^4 + 4 = 64 + 81 + 4 = 149.$$

因 $\sqrt{149} < 13$ ，且 149 不被 2, 3, 5, 7, 11 整除，所以 149 是質數。因此唯一可能的 q 為 149，所有可能值之總和也是 149。

另一種驗算

直接因數分解驗算。 這仍是整除 3 的檢查，但改用直接寫出因數的方式核對主解。對質數 $p > 3$ ， $p = 3m \pm 1$ ，故 $3 \mid (p^4 - 1)$ ；又

$$4^p - 1 = (4 - 1)(1 + 4 + \cdots + 4^{p-1}),$$

所以 $3 \mid (4^p - 1)$ 。於是可直接寫成

$$q = 3 \left(1 + 4 + \cdots + 4^{p-1} + \frac{p^4 - 1}{3} + 2 \right),$$

括號內為大於 1 的正整數，這直接展示了非平凡因數 3。 $p = 2$ 仍給 36。

對 $p = 3$ 所得的 149，只需用適合本講義層級的小質數篩法：因 $12^2 < 149 < 13^2$ ，若 149 是合數，就必有不小於 12 的質因數。逐一檢查 2, 3, 5, 7, 11：149 為奇數、各位數和為 14、末位不是 0 或 5，且 $149 = 7 \cdot 21 + 2 = 11 \cdot 13 + 6$ ，因此都不整除 149。故 149 為質數，結論仍是 $q = 149$ 。

容易出錯的地方

- 模 3 推理不涵蓋 $p = 3$ ，必須另行代入。
- 只討論奇質數而漏查 $p = 2$ 。
- 算出 149 後未證明它是質數。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。

二元二次整數方程

113 學年度 (2024) · 二、計算證明題第 2 題

原題

是否存在整數 m, n ，使得方程式 $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 115$ 有解？若有，請寫下一組解；若沒有，請說明理由。

2. 是否存在整數 m, n ，使得方程式 $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 115$ 有解？若有，請寫下一組解；若沒有，請說明理由。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

不存在整數解。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

乘以 5 後配方，將二元二次式化成平方和 $(5m - 3n)^2 + 26n^2$ ；由大小限制只需檢查有限個 n 。

完整推導

假設存在整數解。原式乘以 5，得

$$25m^2 - 30mn + 35n^2 = 575.$$

把前兩項配方：

$$25m^2 - 30mn + 9n^2 + 26n^2 = 575,$$

即

$$(5m - 3n)^2 + 26n^2 = 575. \quad (1)$$

兩項皆非負，故 $26n^2 \leq 575$ ，所以 $|n| \leq 4$ 。依 $|n| = 0, 1, 2, 3, 4$ ，式 (1) 要求平方數 $(5m - 3n)^2$ 依序為

$$575, 549, 471, 341, 159.$$

逐一夾在相鄰平方數之間：

$$23^2 < 575 < 24^2, \quad 23^2 < 549 < 24^2,$$

$$21^2 < 471 < 22^2, \quad 18^2 < 341 < 19^2, \quad 12^2 < 159 < 13^2.$$

沒有一個是完全平方數，與式 (1) 矛盾。因此不存在整數 m, n 使原方程成立。

另一種驗算

用模 8 可更快否定。右邊 $115 \equiv 3 \pmod{8}$ 。

- m, n 都偶時，左邊是 4 的倍數，模 8 只能為 0 或 4。
- m, n 都奇時， $m^2 \equiv n^2 \equiv 1$ ，故左邊為 $12 - 6mn \equiv 2$ 或 $6 \pmod{8}$ 。

- m 奇、 $n = 2t$ 時，左邊 $\equiv 5 + 4(t^2 - mt) \equiv 5 \pmod{8}$ ，因 $t(t - m)$ 必為偶數。
- $m = 2s$ 、 n 奇時，左邊 $\equiv 7 + 4(s^2 - sn) \equiv 7 \pmod{8}$ ，因 $s(s - n)$ 必為偶數。

四種奇偶情形皆不可能得到 $3 \pmod{8}$ ，故無整數解。

容易出錯的地方

- 只測少量 m, n 不能證明無解；配方後的界限或模運算才提供完備排除。
- 配方時 $35n^2 = 9n^2 + 26n^2$ ，漏掉 $26n^2$ 會得到錯誤結論。
- 模 8 分類要涵蓋四種奇偶組合，不能只討論兩數同奇偶。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

113 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH113-P02，原始試卷連結

33 / 40 · KH114-F01

孿生質數中點的因數個數

114 學年度 (2025) · 一、填充題第 1 題

原題

已知正整數 n 滿足 $100 \leq n \leq 200$ ，且 $n - 1$ 與 $n + 1$ 均為質數，試求滿足上述條件的所有的正整數 n 當中，其正因數個數最多是幾個。

1. 已知正整數 n 滿足 $100 \leq n \leq 200$ ，且 $n - 1$ 與 $n + 1$ 均為質數，試求滿足上述條件的所有的正整數 n 當中，其正因數個數最多是幾個。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

最多有 18 個正因數，在 $n = 180$ 時達到。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

先完整篩出區間內所有孿生質數對 $(n - 1, n + 1)$ ，再分解每個中點 n 並用指數加一法計算因數個數。

完整推導

$n - 1, n + 1$ 都是大於 2 的質數，所以兩者皆為奇數， n 必為偶數。令 $p = n - 1$ ，則 $99 \leq p \leq 199$ ，且 $p, p + 2$ 都要是質數。

區間 $[99, 199]$ 的質數依序為

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

逐一檢查 $p + 2$ ，其中仍為質數的只有

$$p = 101, 107, 137, 149, 179, 191, 197.$$

其餘的 $p + 2$ 分別可直接看出為 3, 5, 7, 11, 13 等小質數的倍數，例如 $103 + 2 = 105$ 、 $109 + 2 = 111$ 、 $131 + 2 = 133$ 、 $167 + 2 = 169$ 、 $199 + 2 = 201$ ；以上清單已涵蓋整個區間，故沒有遺漏。

因此可能的 $n = p + 1$ 是

$$102, 108, 138, 150, 180, 192, 198.$$

分解並計算正因數個數 $\tau(n)$ ：

n	質因數分解	$\tau(n)$
102	$2 \cdot 3 \cdot 17$	8
108	$2^2 \cdot 3^3$	12
138	$2 \cdot 3 \cdot 23$	8
150	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	12
180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	18
192	$2^6 \cdot 3$	14
198	$2 \cdot 3^2 \cdot 11$	12

最大值是 18。

另一種驗算

以 $n = 180$ 驗證達標：179 與 181 都沒有不超過其平方根的質因數，故皆為質數；而 $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ，正因數個數為 $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$ 。再對其餘六個候選中點用表中的分解計算，所得均小於 18。

容易出錯的地方

- 不能只找到 $n = 180$ 就停止；題目問最大值，必須證明候選 n 已完整列出。
- 正因數個數公式是各質因數指數加一後相乘，不是質因數的個數。
- 檢查孿生質數時， n 的範圍會讓 $p = n - 1$ 落在 99 到 199。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

同時形成三個等腰三角形的點

114 學年度 (2025) · 一、填充題第 2 題

原題

在正 $\triangle ABC$ 所在的平面上一點 P ，可使得 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$ 均為等腰三角形，試求這樣的點 P 共有幾個。

2. 在正 $\triangle ABC$ 所在的平面上一點 P ，可使得 $\triangle PAB$ ， $\triangle PBC$ ， $\triangle PAC$ 均為等腰三角形，試求這樣的點 P 共有幾個。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

按「三個等腰三角形皆為非退化三角形」的通常定義，共 10 個點。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

把邊長標準化為 1，令 $x = PA, y = PB, z = PC$ 。每個小三角形為等腰，等價於相應兩個距離相等，或其中一個距離等於正三角形邊長 1；依 x, y, z 中有幾個等於 1 完整分類。

完整推導

把正三角形邊長設為 1，令

$$x = PA, \quad y = PB, \quad z = PC.$$

則

$$\triangle PAB \text{ 等腰} \iff x = y \text{ 或 } x = 1 \text{ 或 } y = 1,$$

其餘兩個小三角形也有同型條件。以下按 x, y, z 中等於 1 的個數分類。

(一) 沒有一個等於 1。三個等腰條件只能分別給出 $x = y, y = z, z = x$ ，所以 $x = y = z$ 。平面上到 A, B, C 等距的點只有外心（正三角形中也就是中心），共 1 點。

(二) 恰有一個等於 1。例如 $x = 1$ 。此時 $\triangle PAB$ 與 $\triangle PAC$ 自動等腰，而 $\triangle PBC$ 因 $y, z \neq 1$ ，必須有 $y = z$ 。所以 P 是「以 A 為圓心、半徑 1 的圓」與 BC 的垂直平分線的交點。正三角形中，該垂直平分線通過 A ，故與此圓有兩個相反方向的交點；兩點都不在任何邊線上，因而三個小三角形皆非退化。指定 x, y, z 中哪一個等於 1 有 3 種，合計 $3 \cdot 2 = 6$ 點。

(三) 恰有兩個等於 1。例如 $x = y = 1$ 。此時 P 是以 A, B 為圓心、半徑 1 的兩圓交點，兩個交點是 C 與 C 對直線 AB 的鏡射點。 $P = C$ 會使 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$ 退化，依三角形通常定義不計；鏡射點則三個三角形都非退化，保留 1 點。選哪兩個距離等於 1 有 3 種，合計 3 點。

不可能三個距離都等於 1：到三頂點等距的唯一點是外心，而其距離為 $1/\sqrt{3} \neq 1$ 。

三類互斥且涵蓋所有情形，因此總數為

$$1 + 6 + 3 = 10.$$

另一種驗算

用座標核對。取 $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1/2, \sqrt{3}/2)$ 。外心給 1 點 $(1/2, \sqrt{3}/6)$ 。以 $PA = 1, PB = PC$ 為例，垂直平分線為 $x = \sqrt{3}y$ ，與 $x^2 + y^2 = 1$ 交於 $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ 、 $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ ；旋轉 $120^\circ, 240^\circ$ 共得 6 點。兩個距離為 1 時，除去三個原頂點後，保留三個鏡射點 $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ 、 $(3/2, \sqrt{3}/2)$ 、 $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ 。合計仍為 10。

容易出錯的地方

- 原題沒有另寫「非退化」；本解依通常幾何定義，三角形必須非退化，故排除 $P = A, B, C$ 。若把退化三點也算入，集合大小會成為 13。
- 等腰不只代表 $PA = PB$ ；也可能是 $PA = AB$ 或 $PB = AB$ 。漏掉後兩類會嚴重少算。
- 分類必須去重；以等於 1 的距離個數分類可確保三類互斥。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

114 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH114-F02，原始試卷連結

35 / 40 · KH114-F05

二元二次式的最小值

114 學年度 (2025) · 一、填充題第 5 題

原題

已知 x, y 為實數，試求 $5x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 12y + 5$ 的最小值。

5. 已知 x, y 為實數，試求 $5x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 12y + 5$ 的最小值。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

最小值為 -5 ，在 $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ 時達到。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

依序對 x, y 配方，把原式寫成兩個非負平方項再減去常數。

完整推導

設原式為 E 。先把含 x 的部分配方：

$$\begin{aligned} E &= 5x^2 + 4xy + 10x + 4y^2 + 12y + 5 \\ &= 5 \left(x + \frac{2}{5}y + 1 \right)^2 + \frac{16}{5}y^2 + 8y. \end{aligned}$$

再對 y 配方：

$$\frac{16}{5}y^2 + 8y = \frac{16}{5} \left(y + \frac{5}{4} \right)^2 - 5.$$

因此

$$E = 5 \left(x + \frac{2}{5}y + 1 \right)^2 + \frac{16}{5} \left(y + \frac{5}{4} \right)^2 - 5.$$

兩個平方項都非負，所以 $E \geq -5$ 。當

$$y = -\frac{5}{4}, \quad x + \frac{2}{5} \left(-\frac{5}{4} \right) + 1 = 0$$

時，即 $(x, y) = (-1/2, -5/4)$ ，兩個平方項同時為 0。故最小值確為 -5 。

另一種驗算

令 $u = x + 1/2, v = y + 5/4$ 。直接展開可得

$$E = -5 + 5u^2 + 4uv + 4v^2 = -5 + (2u + v)^2 + u^2 + 3v^2.$$

右側三個平方項同時為 0 當且僅當 $u = v = 0$ ，因此唯一極小點為 $(-1/2, -5/4)$ ，最小值 -5 。

容易出錯的地方

- 有交叉項 $4xy$ ，不能把 x 與 y 分開各自配方而忽略它。
- 求出臨界點後仍要證明是全域最小值；平方和表示直接完成這一步。
- 代回時要保留分數，避免小數近似造成算術錯誤。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

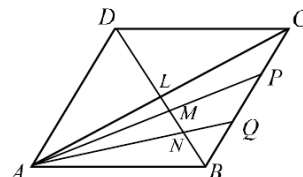
平行四邊形中的面積與交點

114 學年度 (2025) · 一、填充題第 6 題

原題

如圖所示，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABP$ 、 $\triangle ABQ$ 的面積分別為 84、63、28，試求 $\triangle AMN$ 的面積。

6. 如圖所示，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABP$ 、 $\triangle ABQ$ 的面積分別為 84、63、28，試求 $\triangle AMN$ 的面積。



官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

$[\triangle AMN] = 15$ 。此為依原題附圖關係推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

用平行四邊形的兩邊向量作座標。由同底三角形面積比先決定 P, Q 在 BC 上的位置，再求 AP, AQ 與對角線 DB 的交點係數。

完整推導

依原圖， P, Q 在邊 BC 上，且 $M = AP \cap DB$ 、 $N = AQ \cap DB$ 。以 A 為原點，令

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{d}.$$

則 $B = \mathbf{b}, D = \mathbf{d}, C = \mathbf{b} + \mathbf{d}$ 。

若 $X = \mathbf{b} + t\mathbf{d}$ 在 BC 上，則 $\triangle ABX$ 與 $\triangle ABC$ 同底 AB ，高之比為 t ，所以面積比也是 t 。因此

$$P = \mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{d}, \quad Q = \mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{d},$$

因為 $63/84 = 3/4$ 、 $28/84 = 1/3$ 。

一般地，令 $X = \mathbf{b} + t\mathbf{d}$ ，並設 AX 與 DB 交於 Y 。在 AX 上可寫

$$Y = s(\mathbf{b} + t\mathbf{d}),$$

在 DB 上可寫

$$Y = u\mathbf{b} + (1 - u)\mathbf{d}.$$

比較 $\mathbf{b}, \mathbf{d}$ 的係數得 $s = u$ 且 $st = 1 - s$ ，故 $s = 1/(1 + t)$ 。

對 P 的 $t = 3/4$ ，

$$M = \frac{4}{7}\mathbf{b} + \frac{3}{7}\mathbf{d}.$$

對 Q 的 $t = 1/3$ 。

$$N = \frac{3}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{d}.$$

$\triangle AMN$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比等於這兩組係數的行列式絕對值：

$$\frac{[AMN]}{[ABC]} = \left| \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{1}{7} - \frac{9}{28} \right| = \frac{5}{28}.$$

所以

$$[AMN] = 84 \cdot \frac{5}{28} = 15.$$

另一種驗算

取方便的仿射座標 $A = (0, 0), B = (1, 0), D = (0, 1), C = (1, 1)$ 。由面積比得 $P = (1, 3/4), Q = (1, 1/3)$ 。直線 DB 為 $x + y = 1$ ； AP 為 $y = 3x/4$ ，故 $M = (4/7, 3/7)$ ； AQ 為 $y = x/3$ ，故 $N = (3/4, 1/4)$ 。鞋帶公式給此代表圖形的 $[AMN] = 5/56$ 、 $[ABC] = 1/2$ ，比例為 $5/28$ ；乘回原題的 84 得 15。

容易出錯的地方

- 必須依原圖辨認 $M = AP \cap DB$ 、 $N = AQ \cap DB$ ；只讀題幹文字會漏掉這些關係。
- $63/84$ 與 $28/84$ 是 P, Q 到底邊 AB 的相對高度，不是 $BP : PC$ 直接照抄前者與後者。
- 行列式算出的是相對於 $\triangle ABC$ 的面積比；符號可能為負，面積要取絕對值。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。

114 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH114-F06，原始試卷連結

37 / 40 · KH114-F07

九宮格的相鄰數字路徑

114 學年度 (2025) · 一、填充題第 7 題

條件研討題：先說明你採用的「相鄰」定義，不作唯一判分。

原題

將數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 填入 3×3 的 9 宮格當中，使得數字 1 和數字 2 相鄰、數字 2 和數字 3 相鄰、數字 3 和數字 4 相鄰、……、數字 8 和數字 9 相鄰，這樣的填數字的方法有幾種？

7. 將數字 1,2,3,4,5,6,7,8,9 填入 3×3 的 9 宮格當中，使得數字 1 和數字 2 相鄰、數字 2 和數字 3 相鄰、數字 3 和數字 4 相鄰、……、數字 8 和數字 9 相鄰，這樣的填數字的方法有幾種？

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 2 頁。

作答結果

口徑研討題，不作唯一標準答案：若相鄰限於共邊，為 40 種；若也包含斜角相鄰，為 784 種。原卷沒有定義相鄰，兩種條件與完整計數分開列出。

解題切入點

把數字 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 9$ 看成走遍九宮格每格一次的有向 Hamilton 路徑。共邊口徑可用棋盤染色排除邊中格起點，再對角落與中心起點作完整枚舉。

完整推導

先採九宮格題常用的「共邊才算相鄰」口徑。把九格記為

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

一個填法等同於一條有向路徑：數字 1 所在格是起點，依序走到 $2, 3, \dots, 9$ ，每格恰走一次。

把格子作黑白相間染色。四角和中心共 5 個黑格，四個邊中格為白格。長度為 9 的路徑必黑白交替，所以起點與終點都必為黑格；因此起點不可能在邊中格。只須分角落與中心兩型。

固定起點為左上角 a 。逐步走且一旦某個未走格被封死便停止，可完整得到下列八條：

$$\begin{aligned} &abcfedghi, abcfihedg, abcfihgde, abedghifc, \\ &adebcfihg, adghebcfi, adghifcbe, adghifebc. \end{aligned}$$

每一字串都列出數字 1 到 9 所在的格。四個角由旋轉、鏡射對稱，每角皆有 8 條。

固定起點為中心 e ，同樣的完整分支為

$$\begin{aligned} &ebadghifc, ebcfihgda, edabcfihg, edghifcba, \\ &efcbadghi, efihgdabc, ehgdabcfi, ehifcbadg, \end{aligned}$$

也是 8 條。故共邊口徑的填法總數為

$$4 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 40.$$

上述字串逐一列出兩種起點型的所有存活分支，配合染色已排除第三種起點，故計數完備。

若要逐步驗證上列清單沒有漏列，可把下一節的 $H(S, v)$ 遞迴套用到「共邊」鄰接圖：每次只從上一格移到尚未走過的共邊格。最後按起點型態加總，四角各 8、四邊中各 0、中心 8；這和列出的全部字串逐一相符。

另一種驗算

若「相鄰」包含斜角，可在含八方向鄰接的九格圖上用精確子集合遞迴計數。令 $H(S, v)$ 為從指定起點出發、恰走過格集合 S 且停在 v 的路徑數，初值 $H(\{s\}, s) = 1$ ，遞迴為

$$H(S, v) = \sum_{u \in S \setminus \{v\}, u \sim v} H(S \setminus \{v\}, u).$$

這個遞迴每一步只移除最後一格，所以每條合法路徑恰被計一次，也不會計入重複走格。算到九格全集時，角落起點各 138 條、邊中起點各 50 條、中心起點 32 條，總數

$$4 \cdot 138 + 4 \cdot 50 + 32 = 784.$$

這個分支用精確整數程式另行重算亦得到同值；程式只補助算術，完備性來自上式的遞迴分割。

容易出錯的地方

- 原題只寫「相鄰」，沒有說明斜角是否算相鄰；不能把其中一種口徑靜默當成原題條件。
- 路徑反向代表數字 1 與 9 的位置互換，是另一個填法；本計數用有向路徑，沒有除以 2。
- 列舉時若不先用黑白染色限制端點，很容易漏算或重算。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。兩種條件計數均一致；原卷未定義斜角算不算相鄰，僅作研討，不採唯一標準答案。

原卷未定義相鄰是否含斜角；本題只提供條件式詳解，不自動判對錯。

114 學年度官方數學試卷，第 2 頁，題號 KH114-F07，原始試卷連結

38 / 40 · KH114-F11

對稱式方程組的完整解值

114 學年度 (2025) · 一、填充題第 11 題

原題

已知實數 a, b, c 滿足

$$\begin{cases} bc - a^2 = 5, \\ ca - b^2 = -1, \\ ab - c^2 = -7, \end{cases}$$

試求 $8a + 9b + 10c$ 之值。(不只一組解，全對才給分)

11. 已知實數 a, b, c 滿足 $\begin{cases} bc - a^2 = 5 \\ ca - b^2 = -1 \\ ab - c^2 = -7 \end{cases}$ ，試求 $8a + 9b + 10c$ 之值。(不只一組解，全對才給分)。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

擬答：56 或 -56。

解題切入點

相鄰兩式相減會出現共同因子 $(a + b + c)$ ，從而證明 a, b, c 為等差數列；再以原第二式決定公差與中項。

完整推導

令 $s = a + b + c$ 。第一式減第二式、第二式減第三式分別得到

$$(b - a)s = 6, \quad (c - b)s = 6.$$

第一個等式保證 $s \neq 0$ ，故 $b - a = c - b$ 。設共同差為 d ，則

$$a = b - d, \quad c = b + d, \quad s = 3b.$$

由 $(b - a)s = 6$ 得

$$3bd = 6 \implies bd = 2. \quad (1)$$

代入原第二式：

$$ca - b^2 = (b + d)(b - d) - b^2 = -d^2 = -1,$$

因而 $d = \pm 1$ 。配合 (1)：

- $d = 1$ 時 $b = 2$ ，得 $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ ；
- $d = -1$ 時 $b = -2$ ，得 $(a, b, c) = (-1, -2, -3)$ 。

兩組代回三個原式皆成立；推導從任意解出發且未遺失 $s = 0$ 分支，因為 $s = 0$ 已與 $(b - a)s = 6$ 矛盾，所以解已列完。最後

$$8a + 9b + 10c = 56 \text{ 或 } -56.$$

另一種驗算

二次型不變量驗算。三個原式相加得

$$ab + bc + ca - (a^2 + b^2 + c^2) = -3,$$

即

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 6. \quad (A)$$

另令 $x = b - a$ 、 $y = c - b$ 、 $s = a + b + c$ 。相鄰原式之差給出 $xs = 6$ 、 $ys = 6$ ；因 $s \neq 0$ ，故 $x = y$ 。將 $a - b = -x$ 、 $b - c = -x$ 、 $c - a = 2x$ 代入 (A)，得到

$$x^2 + x^2 + 4x^2 = 6 \implies x = \pm 1.$$

又 $s = 6/x = \pm 6$ 。因 a, b, c 是公差 x 的等差數列， $s = 3b$ ，所以 $b = \pm 2$ ，並分別重建 $(1, 2, 3)$ 、 $(-1, -2, -3)$ 。這條驗算以三式總和形成的平方距離不變量決定公差，未使用主解中的 $ca - b^2 = -1$ 來求 d^2 ，仍得到同一完整解集與 ± 56 。

容易出錯的地方

- 找到正數解後停止，漏掉同時變號仍成立的負數解。

- 除以 $a + b + c$ 前沒有先證明它非零。
- 只驗算 $8a + 9b + 10c$ ，未證明原方程組沒有其他解。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。

114 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH114-F11，原始試卷連結

39 / 40 · KH114-P01

整除與循環小數的互補數字

114 學年度 (2025) · 二、計算證明題第 1 題

原題

已知 a, b 為互質的正整數且 $a > b \geq 1$ ，且 $a \mid 10^k + 1$ ， k 為正整數。試回答下列問題。

備註：我們將 p 整除 q 記作 $p \mid q$ ，此時 p 為 q 的因數。

(1) 若 $a \mid 10^k + 1$ ，請問正整數 2、3、5 三個數當中，哪些可以是 a 的因數？(2 分)

(2) 證明：若 $a \mid 10^k + 1$ ，則

$$a \mid \underbrace{99 \cdots 999 \cdots 9}_{2k \text{ 位數}},$$

即 a 整除由 $2k$ 個 9 組成的整數。(5 分)

(3) 根據 (2)，可將 b/a 寫成

$$\frac{\overbrace{x_1 x_2 \cdots x_k}^{k \text{ 位數}} \overbrace{y_1 y_2 \cdots y_k}^{k \text{ 位數}}}{\underbrace{99 \cdots 999 \cdots 9}_{2k \text{ 位數}}},$$

其中分母的每一位都是 9，分子的每一位都是數字 0-9 且允許開頭為 0。試證明：分子中每一組對應的 $x_i + y_i = 9$ ， $i = 1, 2, \dots, k$ 。(8 分)

原題例 1：已知 $7 \mid 1001$ ，則 $7 \mid 999999$ ，可將 $2/7$ 寫成 $285714/999999$ ，發現分子的 6 位數中， $2 + 7 = 8 + 1 = 5 + 4 = 9$ 。

原題例 2：已知 $11 \mid 11$ ，則 $11 \mid 99$ ，可將 $3/11$ 寫成 $27/99$ ，發現分子的 2 位數中，原圖印作「 $0 + 9 = 9$ 」。

編者註 (原卷例示勘誤)：上面保留原卷字樣。第二例分子是 27，對應數字應為 $2 + 7 = 9$ ，不是原印的「 $0 + 9 = 9$ 」。這項例示不一致不改變三小題的一般命題。

1. 已知 a, b 為互質的正整數且 $a > b \geq 1$ ，且 $a \mid 10^k + 1$ ， k 為正整數。試回答下列問題：(備註：我們將 p 整除 q 記作 $p \mid q$ ，此時 p 為 q 的因數。)

(1) 若 $a \mid 10^k + 1$ ，請問正整數 2, 3, 5 三個數當中，那些可以是 a 的因數？(2 分)

(2) 證明：若 $a \mid 10^k + 1$ ，則 $a \mid \underbrace{99 \dots 999 \dots 9}_{2k \text{ 位數}}$ 。(5 分)

(3) 根據(2)，可將 $\frac{b}{a}$ 寫成 $\frac{\overbrace{x_1 x_2 \dots x_k}^{k \text{ 位數}} \overbrace{y_1 y_2 \dots y_k}^{k \text{ 位數}}}{\underbrace{99 \dots 999 \dots 9}_{2k \text{ 位數}}}$ ，其中分母的每一位都是 9、分子的每一位都是數字 0~9 且允許開頭為 0。

試證明：分子中每一組對應的 $x_i + y_i = 9$ ， $i = 1, 2, \dots, k$ 。(8 分)

例如：已知 $7 \mid 1001$ ，則 $7 \mid 999999$ ，可將 $\frac{2}{7}$ 寫成 $\frac{285714}{999999}$ ，發現分子的 6 位數中， $2+7=8+1=5+4=9$

例如：已知 $11 \mid 11$ ，則 $11 \mid 99$ ，可將 $\frac{3}{11}$ 寫成 $\frac{27}{99}$ ，發現分子的 2 位數中， $0+9=9$

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

擬答：

- 2, 3, 5 均不可以是 a 的因數。
- $a \mid 10^{2k} - 1$ ，而 $10^{2k} - 1$ 正是 $2k$ 個 9。
- 對每個 $i = 1, 2, \dots, k$ ，皆有 $x_i + y_i = 9$ 。

解題切入點

令 $R = 10^k$ 。由 $a \mid R + 1$ ，把 b/a 擴分到分母 $R^2 - 1$ ；其分子可寫成 $(C - 1)R + (R - C)$ ，前後兩個 k 位區塊的和恰為 $R - 1 = 99 \dots 9$ 。

完整推導

(1) 若 2 整除 a ，則 2 應整除 $10^k + 1$ ，但後者為奇數，矛盾。又 $10^k + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ 、 $10^k + 1 \equiv 1 \pmod{5}$ ，故 3、5 也不能整除 a 。所以三者均不可以。

(2) 由

$$10^{2k} - 1 = (10^k - 1)(10^k + 1)$$

及 $a \mid 10^k + 1$ ，立刻得到 $a \mid 10^{2k} - 1$ 。而 $10^{2k} - 1$ 的十進位表示正是 $2k$ 個 9。

(3) 令 $R = 10^k$ 、 $N = R^2 - 1$ 。因 $a \mid R + 1$ ，令

$$n = \frac{R+1}{a} \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad C = bn.$$

由 $1 \leq b < a$ 得

$$1 \leq C = b \frac{R+1}{a} < R+1,$$

故整數 C 滿足 $1 \leq C \leq R$ 。把 b/a 擴分為分母 N ：

$$\frac{b}{a} = \frac{bN/a}{N} = \frac{b(R+1)(R-1)/a}{N} = \frac{C(R-1)}{N}.$$

分子

$$M = C(R-1) = CR - C = (C-1)R + (R-C). \quad (1)$$

設 $X = C-1$ 、 $Y = R-C$ ，則 $0 \leq X, Y \leq R-1$ 。將 X, Y 各以恰好 k 位表示（不足補前導 0），式 (1) 表示 M 是前區塊 X 與後區塊 Y 的串接，而且

$$X + Y = (C-1) + (R-C) = R-1 = \underbrace{99 \cdots 9}_{k \text{ 個 } 9}.$$

因 $Y = (R-1) - X$ ，由全為 9 的數減去 X 時逐位不需借位，所以每個後半位數都是前半對應位的 9 補數：

$$x_i + y_i = 9 \quad (i = 1, \dots, k).$$

邊界 $C = R$ 也包含在內，此時兩區塊為 $99 \cdots 9$ 與 $00 \cdots 0$ 。

另一種驗算

乘法階與長除法餘數驗算。由 (1) 已知 $2, 5 \nmid a$ ，故 10 在模 a 下可逆；題設給 $10^k \equiv -1 \pmod{a}$ ，平方即 $10^{2k} \equiv 1 \pmod{a}$ ，這從乘法階的角度再次證明 (2)。

對 (3)，直接做 b/a 的十進位長除法。令 $R = 10^k$ ，第一個 k 位區塊為

$$X = \left\lfloor \frac{bR}{a} \right\rfloor,$$

並令第一段除法餘數為 $r = bR - aX$ 。由 $R \equiv -1 \pmod{a}$ 得 $r \equiv -b \pmod{a}$ ；又 $0 < r < a$ ($\gcd(a, b) = 1$ 且 $\gcd(a, R) = 1$ ，所以餘數不為 0)，故 $r = a - b$ 。第二個 k 位區塊因此是

$$Y = \left\lfloor \frac{rR}{a} \right\rfloor = \left\lfloor R - \frac{bR}{a} \right\rfloor = R - 1 - X,$$

因 bR/a 不是整數。於是 $X + Y = R - 1 = 99 \cdots 9$ ，逐位得到 $x_i + y_i = 9$ 。這是以長除法的中間餘數證明互補，不使用主解的擴分分子拆式。

例 1 的長除法確實給 $X = 285$ 、 $Y = 714$ ；例 2 若使用題示 $3/11 = 27/99$ ，則 $X = 2$ 、 $Y = 7$ ，得到 $2 + 7 = 9$ 。

容易出錯的地方

- 忽略題目允許前導 0，造成前後兩個區塊位數無法一一配對。
- 只由 $X + Y = 99 \cdots 9$ 下結論，卻未說明減法無借位或逐位無進位。
- 原題第二例的算式與末句互相不一致；不能把印刷的「 $0+9=9$ 」當成 27 的位數驗算。
- 把機器有限枚舉當成對任意正整數 k 的證明。

覆核紀錄

已對照官方原卷條件，完成來源獨立盲解、作者推導及逐題找錯覆核。程式檢查僅作輔助，不取代上方證明；本頁不是校方官方解答。原卷第二個例子同時寫 $3/11 = 27/99$ 與「 $0 + 9 = 9$ 」，兩者不一致。本講義保留原字與原圖，另指出分子 27 對應的是 $2 + 7 = 9$ ；一般命題及三小題證明不受這個例示筆誤影響。

114 學年度官方數學試卷，第 3 頁，題號 KH114-P01，原始試卷連結

40 / 40 · KH114-P02

整除限制下的排列計數

114 學年度 (2025) · 二、計算證明題第 2 題

原題

將自然數 $3, 4, 5, \dots, 1154, 1155$ 排成一個數列 $\{a_k\}$ ，使得數字 k 要為 a_k 的因數，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, 1153$ ，試求滿足條件的排列種數。

2. 將自然數 $3, 4, 5, \dots, 1154, 1155$ 排成一個數列 $\{a_k\}$ ，使得數字 k 要為 a_k 的因數，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, 1153$ ，試求滿足條件的排列種數。

官方原卷影像，保留原圖與所有小題；PDF 第 3 頁。

作答結果

75 種。此為依題意推導的擬答，不是官方答案。

解題切入點

把每個位置畫成箭頭 $k \rightarrow a_k$ 。因 $k \mid a_k$ ，非固定箭頭必嚴格向上；整張圖只能由固定點及兩條從缺少的數字 1, 2 出發、走到多出的數字 1154, 1155 的整除鏈組成。

完整推導

對每個位置畫箭頭

$$k \longrightarrow a_k.$$

值的集合是 $\{3, 4, \dots, 1155\}$ 。因此節點 1, 2 沒有入箭頭；每個 $3, 4, \dots, 1153$ 恰有一條入箭頭且有一條出箭頭；1154, 1155 恰有一條入箭頭但沒有出箭頭。

又因 $k \mid a_k$ 且兩者皆正， $a_k \geq k$ ；若 $a_k \neq k$ ，則箭頭嚴格由小指向大。因此不可能有長度大於 1 的迴圈。所有不在非平凡路徑上的節點只能是固定點 $k \rightarrow k$ ，而非平凡部分恰是兩條互不相交的整除鏈，分別從 1, 2 出發，終止於 1154, 1155。

從 2 出發的鏈上每個數都是偶數，所以不可能終止於奇數 1155；它必終止於 1154。又

$$1154 = 2 \cdot 577,$$

因 $\sqrt{577} < 25$ ，逐一試除 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 均不能整除，故 577 為質數。因此 1154 的正因數只有 1, 2, 577, 1154。從 2 出發不可能走到奇數 577，所以這條鏈只能是

$$2 \rightarrow 1154.$$

另一條鏈便從 1 出發、終止於

$$1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

鏈中每一個內部節點都整除其後所有節點，故必是 1155 的因數。因 1155 的四個質因數互異，一條嚴格整除鏈

$$1 = d_0 \mid d_1 \mid \cdots \mid d_t = 1155$$

等同於把集合 $\{3, 5, 7, 11\}$ 分成有順序的非空組：第一步乘入第一組質因數，第二步乘入第二組，依此類推。反過來，每個有序分組都產生一條合法鏈，其他節點全取固定點，故是一一對應。

依組數計算有序集合分割：

$$\begin{aligned} & 1!S(4, 1) + 2!S(4, 2) + 3!S(4, 3) + 4!S(4, 4) \\ &= 1 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 24 = 75. \end{aligned}$$

所以共有 75 種排列。

另一種驗算

不用直接引用第二類 Stirling 數，可用遞迴核對。令 $F(r)$ 為 r 個不同質因數從空集合走到全集的嚴格子集合鏈數，最後一步之前可停在任一真子集，故

$$F(0) = 1, \quad F(r) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} F(j).$$

依序算得

$$F(1) = 1, \quad F(2) = 1 + 2 = 3,$$

$$F(3) = 1 + 3 + 3 \cdot 3 = 13,$$

$$F(4) = 1 + 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 13 = 75.$$

這與有序分組計數一致。小規模精確枚舉整除鏈亦可逐項得到同一序列 1, 3, 13, 75。

容易出錯的地方

- 不能從 $k \geq 578$ 的固定性就直接猜其餘也全固定；多出的值 1154, 1155 會形成兩條整除鏈。
- 排列中的值沒有 1, 2，卻多了 1154, 1155；這正是兩條非平凡路徑的起點與終點。
- 質因數可以一次加入多個，所以不能只數四個質因數的 $4! = 24$ 種排列；還要包含跳過中間因數的鏈。

覆核紀錄

本題已由作者推導、Fable 5.1 提供獨立解答，並由另一位 Sol 覆核原卷圖像與完整推導，最後由 Astra 比對裁定。主答案一致；採用本講義中經覆核的完整推導與驗算，不直接照抄外部回覆。